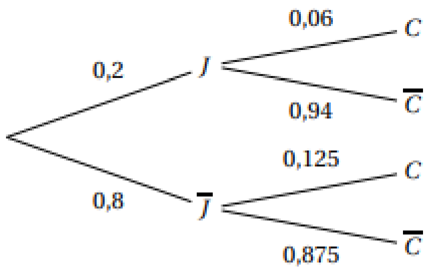
TSpé Maths	DS 2 : corrigé

Exercice 1 :

Partie A

1.



2. J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(C) = P(J \cap C) + P(\overline{J} \cap C) = 0{,}2 \times 0{,}06 + 0{,}8 \times 0{,}125 = 0{,}112$$

Donc la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112

Partie B

1. X suit la loi binomiale de paramètres n=30 et p = 0,112
2. P (X = 5) =$\binom{30}{5} \times 0{,}112^5 \times (1 - 0{,}112)^{25} \approx 0{,}129$
   Donc la probabilité qu'exactement 5 skieurs aient choisi l'option coupe-file est d'environ 0,129
3. $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}3317 \approx 0{,}668$
   donc la probabilité qu'au moins 3 skieurs aient choisi l'option coupe-file est d'environ 0,668

4. Déterminer la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) > 0{,}99$. Interpréter le résultat.

   D'après la calculatrice, $P(X \leq 7) \approx 0{,}985$ et $P(X \leq 8) \approx 0{,}996$

   donc le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) > 0{,}99$ est $k = 8$

   Cela signifie que dans un groupe de 30 skieurs, il y a plus de 99 % de chances que moins de 8 skieurs choisissent l'option coupe-file.

Exercice 2 :

1) $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-(-1) \\ y_G-5 \\ z_G-3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G+1 \\ y_G-5 \\ z_G-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = \frac{4}{3} \\ y_G - 5 = -\frac{2}{3} \\ z_G - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} - 1 \\ y_G = -\frac{2}{3} + 5 \\ z_G = -4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{13}{3} \\ z_G = -1 \end{cases}$

donc les coordonnées du point G sont ($\frac{1}{3}$; $\frac{13}{3}$; -1).

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-2}{2} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{-2}$
donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

3) $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -2 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = -2\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 2\alpha - 1 \\ -2 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = -2\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + 3 \times \frac{2\alpha-1}{2} \\ 3 = -2\alpha - 2 \times \frac{2\alpha-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + \frac{6\alpha-3}{2} \\ 3 = -2\alpha - (2\alpha - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + 3\alpha - \frac{3}{2} \\ 3 = -2\alpha - 2\alpha + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 + \frac{3}{2} = \alpha \\ 3 - 1 = -4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ \frac{2}{-4} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\times(-\frac{1}{2})-1}{2} \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ -\frac{1}{2} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ -\frac{1}{2} = \alpha \end{cases}$$

on a donc $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -1$ Ainsi $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

4) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{-2} \neq \frac{5}{-2}$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Or, $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ce qui prouve que les points A, B, C et D sont coplanaires, donc on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

Exercice 3 :

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$.
Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$ à valeurs dans $[-68\,;\,37]$. Or $0 \in [-68\,;\,37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

1.a. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x^2$

$u'(x) = e^x$ $v'(x) = 2x$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$ d'où $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$

b. La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 si $f'(1) = 0$

or $f'(1) = \frac{e^1\left(1+1^2-2\right)}{(1+1^2)^2} = \frac{e^1 \times 0}{4} = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.
Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.
$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.
On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.