1. **a.** Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   b. $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 2-1-1=0$.
   Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$.
   Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ est de la forme $x-y+z+d=0$.
   Le point B appartient à ce plan. Par conséquent $1-1+2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.
   Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est donc $x-y+z-2=0$.

   b. Montrons que la droite est incluse dans chacun des deux plans.
   Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $2\times 0+(-2+t)-t+2=-2+t-t+2=0$: Δ est incluse dans $\mathcal{P}_1$.
   $0-(-2+t)+t-2=2-t+t-2=0$: Δ est incluse dans $\mathcal{P}_2$.
   Ainsi Δ est incluse dans deux plans perpendiculaires.
   La droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3. **a.** Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix}-1\\-2+t-1\\t-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix}-1\\-3+t\\t-1\end{pmatrix}$
   Par conséquent :
   $$\begin{aligned}AM_t &= \sqrt{(-1)^2+(-3+t)^2+(t-1)^2}\\ &= \sqrt{1+9-6t+t^2+t^2-2t+1}\\ &= \sqrt{2t^2-8t+11}\end{aligned}$$

   b. La distance AM_t est minimale si, et seulement si, $2t^2-8t+11$ est minimale (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-8t+11$.
   Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré dont le coefficient principal est $2>0$.

Elle admet donc un minimum en $\dfrac{-(-8)}{2\times 2}=2$.
Or $f(2)=3$
H est le point de Δ tel que AM_t est minimale.
Ainsi $AH=\sqrt{3}$.

4. **a.** Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est

$$\begin{cases} x=1+2k \\ y=1+k \\ z=1-k \end{cases} \qquad \forall k\in\mathbb{R}$$

b. On note H' le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.
En prenant $k=-\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ on retrouve les coordonnées du point H'. Donc H' appartient à $\mathcal{D}_1$.
De plus $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}+2=-\dfrac{6}{3}+2=0$. Le point H' appartient également à $\mathcal{P}_1$.
Ainsi H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Montrons dans un premier temps que AH_1HH_2 est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$.
Ainsi $\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{H_2H}$ et AH_1HH_2 est un parallélogramme.
Par construction $\overrightarrow{AH_1}$ est orthogonal à $\mathcal{P}_1$. Donc $\overrightarrow{AH_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{H_1H}$ car les points H_1 et H appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$.
AH_1HH_2 est donc un rectangle.

Remarque : on peut aussi montrer que le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit en montrant que $\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{H_1H}=0$