n° 75 (fiche) QCM

1) • pour $f(x) = -2e^{-2x}$, on a $f'(x) = -2\times(-2e^{-2x}) = 4e^{-2x}$

et $f''(x) = 4\times(-2e^{-2x}) = -8e^{-2x}$

or $-8<0$ et $e^{-2x}>0$ donc $f''(x)<0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}$ (donc f ne convient pas)

• pour $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3$, on a $g'(x) = 4x^3 - 6x^2$ et $g''(x) = 12x^2 - 12x$

or pour $g''(x)$, on a

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a = 12 > 0$

car $12x^2 - 12x = 0$
$\Leftrightarrow x(12x-12) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $12x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

donc g est concave sur $[0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$ (donc g ne convient pas)

• pour $h(x) = x^3 - 6x + 1$, on a $h'(x) = 3x^2 - 6$ et $h''(x) = 6x$

or pour $h''(x)$, on a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	

$a = 6 > 0$

donc h est convexe sur $[0;+\infty[$ $\Rightarrow$ la réponse est donc c

(L'étude de la fonction p est inutile car l'énoncé précise que l'on recherche la seule fonction qui est convexe sur $[0;+\infty[$)

2) pour $g(x) = x^3 - 9x$, on a $g'(x) = 3x^2 - 9$ et $g''(x) = 6x$

donc g est convexe sur $[0;+\infty[$ car $g''(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$ (voir tableau de $h''(x)$ de la question 1))

$\Rightarrow$ réponse b

car $g''(x) = h''(x) = 6x$

3) $f(x) = xe^{-x}$

$f = uv$ avec $u(x) = x$ $\quad v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f' = uv$ avec $u(x) = e^{-x}$ $\quad u'(x) = -e^{-x}$
$v(x) = 1-x$ $\quad v'(x) = -1$

d'où $f''(x) = e^{-x}\times(-1) + (1-x)\times(-e^{-x}) = e^{-x}(-1-1+x) = e^{-x}(x-2)$

on a alors

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^{-x}			+		
$x-2$		$-$	0	+	
$f''(x)$		$-$	0	+	

$a=1>0$

donc f est concave sur $]-\infty;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$ (d'après le signe de $f''(x)$)

or si f est concave sur $]-\infty;2]$

alors f est concave sur $[0;1]$ (car $[0;1] \subset]-\infty;2]$)

$\Rightarrow$ réponse ⓐ

n° 76 (fiche)

$f(x) = -0{,}03x^4 + 0{,}36x^2 - 0{,}05x$

1) $f'(x) = -0{,}12x^3 + 0{,}72x - 0{,}05$

$f''(x) = -0{,}36x^2 + 0{,}72$

2) on peut déterminer les racines de $f''(x)$ en calculant Δ ou en résolvant l'équation $-0{,}36x^2 + 0{,}72 = 0$

$\Leftrightarrow -0{,}36x^2 = -0{,}72$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-0{,}72}{-0{,}36}$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

on a alors

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f''(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

$a = -0{,}36 < 0$

ainsi f est concave sur $[-2;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};2]$ et f est convexe sur $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

remarque : C_f possède 2 points d'inflexion d'abscisse $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ car la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe pour $x=-\sqrt{2}$ et $x=\sqrt{2}$