TermSpéMaths	PRIMITIVES

EXERCICE 1
Déterminer les primitives de chacune des fonctions f définies sur ℝ par les expressions suivantes :

a/ $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$

$F(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4 \times \frac{x^2}{2} + C = \boldsymbol{\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C}$

b/ $f(x) = 3e^x + x - 1$

$\boldsymbol{F(x) = 3e^x + \frac{x^2}{2} - x + C}$

c/ $f(x) = 5e^{-x+1}$

$F(x) = 5 \times (-e^{-x+1}) + C = \boldsymbol{-5e^{-x+1} + C}$

d/ $f(x) = \frac{6x+6}{x^2+2x+4}$

forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 4$ donc $u'(x) = 2x + 2$ or
$f(x) = \frac{6x+6}{x^2+2x+4} = \frac{3(2x+2)}{x^2+2x+4}$ donc $f = \frac{3u'}{u}$

de plus sur ℝ,
$x^2 + 2x + 4 > 0$ $car\ \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$ donc $x^2 + 2x + 4$ est toujours du signe de $a = 1 > 0$

ainsi $F = 3\ln(u) + C$ donc $\boldsymbol{F(x) = 3\ln(x^2 + 2x + 4) + C}$

e/ $f(x) = xe^{-x^2}$

forme $u'e^u$ avec $u(x) = -x^2$ donc $u'(x) = -2x$ or

$f(x) = xe^{-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2xe^{-x^2})$ donc $f = -\frac{1}{2}u'e^u$

donc $F = -\frac{1}{2}e^u + C$ donc $\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C}$

f/ $f(x) = 5x(3x^2 + 2)^4$

forme $u'u^n$ avec $u(x) = 3x^2 + 2$ donc $u'(x) = 6x$ or

$f(x) = 5x(3x^2 + 2)^4 = \frac{5}{6} \times 6x(3x^2 + 2)^4$ donc $f = \frac{5}{6}u'u^4$

donc $F = \frac{5}{6} \times \frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{5}{6} \times \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{6}u^5 + C$ donc $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{6}(3x^2 + 2)^5 + C}$

EXERCICE 2
Déterminer la primitive F vérifiant la condition initiale pour chacune des fonctions suivantes définies sur ℝ par :

a/ $f(x) = \frac{9x}{9+x^2}$ avec $F(0) = 5$

forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 9 + x^2$ donc $u'(x) = 2x$ or
$f(x) = \frac{9x}{9+x^2} = \frac{\frac{9}{2}\times 2x}{9+x^2} = \frac{9}{2} \times \frac{2x}{9+x^2}$ donc $f = \frac{9}{2} \times \frac{u'}{u}$

de plus sur ℝ,
$9 + x^2 > 0$ $(car\ x^2 \geq 0\ et\ 9 > 0)$

ainsi $F = \frac{9}{2}\ln(u) + C$ donc $F(x) = \frac{9}{2}\ln(9 + x^2) + C$

or $F(0) = 5 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\ln(9 + 0^2) + C = 5 \Leftrightarrow C = 5 - \frac{9}{2}\ln 9$

donc $\boldsymbol{F(x) = \frac{9}{2}\ln(9 + x^2) + 5 - \frac{9}{2}ln9}$

b/ $f(x) = 5e^{3x} + 4x$ avec $F(0) = 0$

on a $F(x) = 5 \times \frac{1}{3}e^{3x} + 2x^2 + C = \frac{5}{3}e^{3x} + 2x^2 + C$

or $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}e^0 + 2 \times 0^2 + C = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{5}{3}$ donc

$\boldsymbol{F(x) = \frac{5}{3}e^{3x} + 2x^2 - \frac{5}{3}}$