Terminales Spécialité Mathématiques

Calcul intégral : exercices facultatifs

pour consolider les acquis

Exercice 1
Déterminer une primitive sur ℝ de chacune des fonctions *f*, *g* et *h* définies par les expressions suivantes :

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ $g(x) = 5e^{2x+3}$ $h(x) = 2xe^{1+x^2}$

$\boldsymbol{F(x) = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x}$ $\boldsymbol{G(x) = \frac{5}{2}e^{2x+3}}$ $\boldsymbol{H(x) = e^{1+x^2}}$ $car\ h = u'e^u\ \ donc\ H = e^u$

Exercice 2
Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = (2 - 2x)e^x$
a) Montrer que les primitives F de la fonction *f* sur ℝ sont les fonctions définies par l'expression $F(x) = (4 - 2x)e^x + C$ (où C est un réel).
$F = uv + C$ avec $u(x) = 4 - 2x$ et $v(x) = e^x$
$u'(x) = -2$ et $v'(x) = e^x$

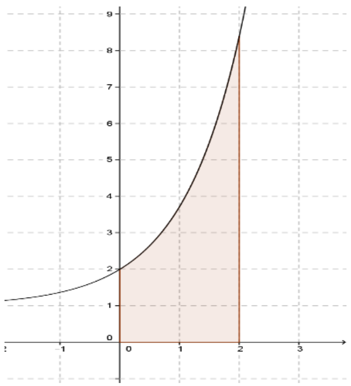
Alors $F'(x) = -2e^x + (4 - 2x)e^x = (-2 + 4 - 2x)e^x = (2 - 2x)e^x = f(x)$

Donc les primitives de f sur ℝ sont les fonctions définies par $F(x) = (4 - 2x)e^x + C$

b) Déterminer la primitive F de la fonction *f* telle que F (0) = 3.

$F(x) = (4 - 2x)e^x + C$ or $F(0) = 3 \Leftrightarrow (4 - 2 \times 0)e^0 + C = 3 \Leftrightarrow 4 + C = 3 \Leftrightarrow C = -1$ **donc** $\boldsymbol{F(x) = (4 - 2x)e^x - 1}$

Exercice 3
Le graphique ci-contre donne la représentation graphique de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = e^x + 1$
On note A l'aire sous la courbe.



a) Exprimer A à l'aide d'une intégrale puis donner, par lecture graphique, une valeur approchée de A

A est l'aire sous la courbe de la fonction f entre les abscisses 0 et 2 donc $\boldsymbol{A = \int_0^2 f(x)dx}$ et en comptant les carreaux unitaires, on a $\boldsymbol{A \approx 9}$ **u.a**

b) Calculer A. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

$A = \int_0^2 f(x)dx = [\,e^x + x\,]_0^2 = (e^2 + 2) - (e^0 + 0) = e^2 + 2 - 1 = \boldsymbol{e^2 + 1} \approx \boldsymbol{8,39\ u.a}$

Exercice 4
Soit la fonction f définie sur [1 ; 6] par $f(x) = 3lnx + 2$.
a) Justifier que F définie sur [1 ; 6] par $F(x) = 3xlnx - x$ est une primitive de f.

$F = uv + w$ avec $u(x) = 3x$ $v(x) = lnx$ et $w(x) = -x$
$u'(x) = 3$ $v'(x) = \frac{1}{x}$ $w'(x) = -1$
$F'(x) = 3lnx + 3x \times \frac{1}{x} - 1 = 3lnx + 3 - 1 = 3lnx + 2 = f(x)$ donc F est une primitive de f

b) Calculer la valeur exacte de I = $\int_1^6 f(x)dx$.

$$I = \int_1^6 f(x)dx = [\ F(x)\ ]_1^6 = F(6) - F(1) = (3 \times 6ln6 - 6) - (3 \times 1ln1 - 1) = 18ln6 - 6 + 1 = \mathbf{18ln6 - 5}$$

Exercice 5
Calculer chacune des intégrales I suivantes :

a/ I = $\int_0^5 (e^x + x)dx = \left[\ e^x + \frac{x^2}{2}\ \right]_0^5 = \left(e^5 + \frac{5^2}{2}\right) - \left(e^0 + \frac{0^2}{2}\right) = e^5 + \frac{25}{2} - 1 = \boldsymbol{e^5 + \frac{23}{2}}$

b/ I = $\int_{-2}^4 (x^2 - x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\ \right]_{-2}^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} + 4\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right) = \left(\frac{64}{3} - 4\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{72}{3} = \mathbf{24}$

c/ I = $\int_0^6 2e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}\ e^{-3x}\ \right]_0^6 = \left(-\frac{2}{3}e^{-3\times6}\right) - \left(-\frac{2}{3}e^0\right) = \boldsymbol{-\frac{2}{3}e^{-18} + \frac{2}{3}}$

d/ I = $\int_{-1}^3 (12 - 4x)dx = [\ 12x - 2x^2\ ]_{-1}^3 = \left(12 \times 3 - 2 \times 3^2\right) - \left(12 \times (-1) - 2 \times (-1)^2\right) = 18 - (-14) = \mathbf{32}$

e/ I = $\int_1^4 \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = [\ 2x + lnx\ ]_1^4 = (2 \times 4 + ln4) - (2 \times 1 + ln1) = 8 + ln4 - 2 = \mathbf{6 + ln4}$

f/ I = $\int_0^1 x^2 dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$