Term Spé Maths **Vecteurs dans l'espace**

Pour ce type d'exercices où il faut décomposer des vecteurs en utilisant la relation de Chasles, il n'est pas rare de « tâtonner » ou de « tourner en rond », tout en sachant que, bien souvent, il n'y a pas qu'une seule façon d'aboutir au résultat.

Exercice 1

Il s'agit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires,
donc il faut montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{HF}$

On part donc du vecteur $\overrightarrow{AP}$ que l'on va décomposer en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots P}$

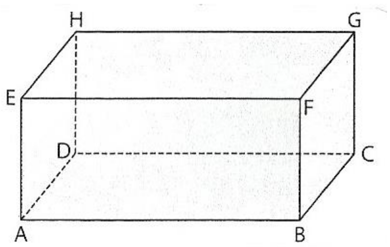
Mais quel point choisir pour la décomposition ? car on peut écrire

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ ou $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$ ou bien encore $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP}$ ... et il y a plein d'autres possibilités…

Pour faire le bon choix, il faut utiliser les éléments de l'énoncé. Ici on sait que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$ donc on a une relation portant sur le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}}$. Il est donc judicieux de décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en utilisant le point **B**.

On a alors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ or $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$

D'où $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$
$= -\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$ or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH}$ car ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle



D'où $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$
$= \overrightarrow{FH}$
$= -\overrightarrow{HF}$ donc $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{HF}$ ce qui prouve que les vecteurs sont colinéaires

Exercice 2

Faire une figure est inutile ici car un tétraèdre ne possède pas de propriétés particulières (égalités de vecteurs par exemple)

Il faut montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
donc on part du 1^er^ membre de l'égalité ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$) que l'on va « transformer » pour obtenir le 2^ème^ membre et puisque le 2^ème^ membre contient le vecteur $\overrightarrow{AD}$, on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en utilisant la relation de Chasles et le point D (soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$)

On a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ (on permute les vecteurs $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$)
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ car $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$

On a donc bien démontré que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Autre possibilité :

On peut aussi partir du 1^er^ membre ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$) mais choisir de décomposer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en utilisant le point B ce qui donne :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Exercice 3

I étant le milieu de [AB], on va utiliser la relation de Chasles avec le point I pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

De même, J étant le milieu de [CD], on va utiliser la relation de Chasles avec le point J pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\,\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\,\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\,\overrightarrow{OI} + \vec{0} + 2\,\overrightarrow{OJ} + \vec{0}\end{aligned}$$

car I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
et J est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= 2\,\overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ} \\ &= 2\,(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) \\ &= 2 \times \vec{0} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

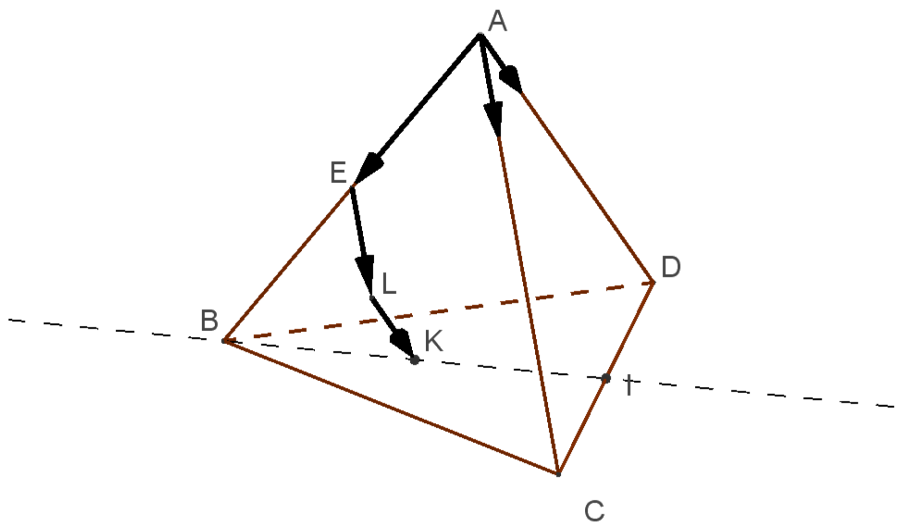
car O est le milieu de [IJ] donc $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

Exercice 4

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [CD] et K est le point défini par

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

a/



Sur cette figure, on a

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

b/ Pour $\overrightarrow{BI}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{car I est le milieu de [CD] donc } \overrightarrow{CI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{BC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Pour $\overrightarrow{BK}$, on a :

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$= \qquad \vec{0} \qquad + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

car $\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ On a donc $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

c/ On a montré que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

on en déduit que $\overrightarrow{BI} = 2\,\overrightarrow{BK}$ (en effet, $2\,\overrightarrow{BK} = 2\,(\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})) = \frac{2}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BI}$)

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires

Donc les points B, I et K sont alignés

(et comme $\overrightarrow{BI} = 2\,\overrightarrow{BK}$, alors on peut aussi en déduire que K est le milieu de [BI])