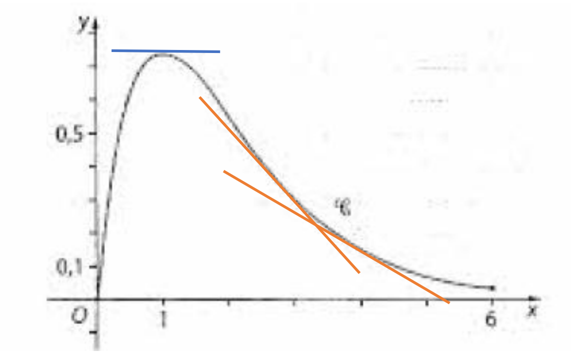
<u>Exercice</u> : continuité et convexité



1.a/ f est convexe sur [2 ; 6] car la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de ses tangentes (en orange sur le graphique) sur cet intervalle

b/ f est concave en 1 car la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente en 1(en bleu sur le graphique) donc $f''(1)$ est négatif

2.a/ $f(x) = 2xe^{-x}$ $\qquad f = u \times v \quad avec \qquad u(x) = 2x \qquad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = -e^{-x}$

$or\ (uv)' = u'v + uv' \quad donc \quad f'(x) = 2e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(2 - 2x)$

b/

x	0		1		6
$2 - 2x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$2e^{-1}$	↘	$12e^{-6}$

$a = -2 < 0$

c/ Sur [0 ; 1] , f est définie, continue et strictement croissante.
Or 0,65 est compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}65$ admet une unique solution α

On montre de même que l'équation $f(x) = 0{,}65$ admet une unique solution β sur [1 ; 6]

Ainsi, l'équation $f(x) = 0{,}65$ admet deux solutions α et β sur [0 ; 6]

d/ D'après la calculatrice, $\alpha \approx 0{,}581$ et $\beta \approx 1{,}584$

e/ D'après ce qui précède, $f(x) \geq 0{,}65$ pour $x \in [\,\alpha\,;\,\beta\,]$ or $\beta - \alpha \approx 1{,}584 - 0{,}581 \approx 1{,}003 > 1$

donc le taux a dépassé 0,65 ppm pendant plus d'une minute, le personnel de l'usine a donc été affecté par cette fuite de gaz.

3. On admet que $f''(x) = (2x - 4)e^{-x}$

a/

x	0		2		6
$2x - 4$		$-$	0	$+$	
e^{-x}			$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$a = 2 > 0$

Ainsi f est concave sur [0 ; 2] (car f'' est négative) et f est convexe sur [2 ; 6] (car f'' est positive)

De plus, la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 2$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2

b/ La baisse du taux de gaz commence à ralentir à partir du point d'inflexion, donc à partir de 2 minutes.