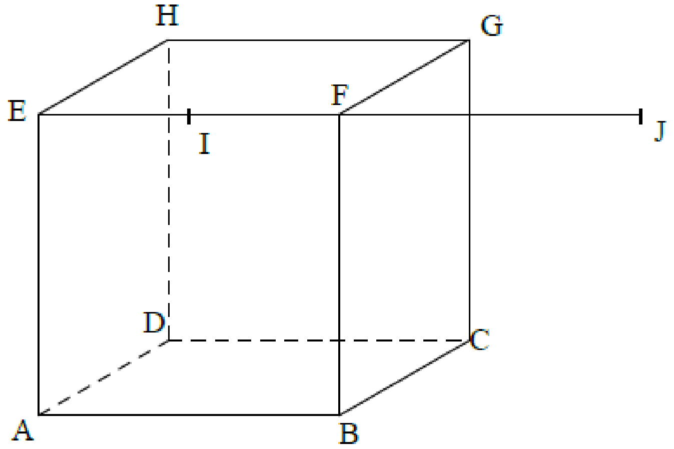
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.




Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

**1. a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées de I et de J.

I (0,5 ; 0 ; 1) et J (2 ; 0 ; 1)

**b.** En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

D (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 0 ; 0) et G (1 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-0,5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**c.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs non colinéaires (coordonnées non proportionnelles) de (BGI).

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$, donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

**d.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

B (1 ; 0 ; 0) : $2\times1 - 0 + 0 - 2 = 0$.

G (1 ; 1 ; 1) : $2\times1 - 1 + 1 - 2 = 0$.

I (0,5 ; 0 ; 1) : $2\times0,5 - 0 + 1 - 2 = 0$.

Donc $2x - y + z - 2 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (BGI)

**2.** On note $\mathscr{D}$ la droite passant par F et orthogonale à (BGI).

**a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ passe par F (1 ; 0 ; 1) et à pour vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc $\mathscr{D}$ : $\begin{cases}x=2t+1\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

**b.** On considère le point L de coordonnées $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

Montrer que L est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BGI).

$2(2t+1)+t+t+1-2=0 \Leftrightarrow 6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$, d'où $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

**3.** On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et $h$ la hauteur associée à cette base.

**a.** Calculer le volume de la pyramide FBGI.

$\mathscr{B}=\mathscr{A}_{BFG}=0{,}5$ et $h=FI=0{,}5$ donne $\mathscr{V}_{FBGI}=\frac{1}{12}$.

**b.** Calculer la longueur FL et en déduire l'aire du triangle BGI.

F (1 ; 0 ; 1) et $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ donc $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, d'où $FL=\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}=d(F,(BGI))$

$\mathscr{V}_{FBGI}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{BGI}\times FL=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{BGI}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \mathscr{A}_{BGI}=\frac{6}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.