Exercice 1

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^3 \left(5t + \frac{5}{t}\right) dt = \left[5 \times \frac{1}{2} t^2 + 5\ln(t)\right]_1^3$$

$$= \left(5 \times \frac{1}{2} \times 3^2 + 5\ln(3)\right) - \left(5 \times \frac{1}{2} \times 1^2 + 5\ln(1)\right)$$

$$= \frac{45}{2} + 5\ln(3) - \frac{5}{2}$$

$$= \mathbf{20 + 5\mathit{ln}(3)}$$

$$J = \int_{-1}^1 15e^{3x+3}\, dx$$

Une primitive de $f(x) = 15e^{3x+3}$ est $F(x) = 15 \times \frac{1}{3} e^{3x+3} = 5e^{3x+3}$

$$J = \int_{-1}^1 15e^{3x+3}\, dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = [\, F(x)]_{-1}^{1}$$

$$= F(1) - F(-1)$$

$$= 5e^{3\times 1+3} - 5e^{3\times(-1)+3}$$

$$= 5e^6 - 5e^0$$

$$= 5e^6 - 5$$

Exercice 2

On considère l'intégrale $I = \int_0^5 \frac{2x}{x^2+5} dx$.

Calculer I et montrer que $I = ln(6)$

$I = \int_0^5 f(x)\, dx$ avec $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$ or f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 5$ donc $u'(x) = 2x$

ainsi $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) > 0$ sur $[\,0\,;5\,]$

donc une primitive de f est $F = \ln(u)$ soit $F(x) = \ln(x^2 + 5)$

on a alors $I = \int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0)$

$$= \ln(5^2 + 5) - \ln(0^2 + 5)$$

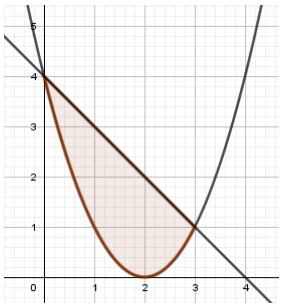
$$= \ln(30) - \ln(5)$$

$$= \ln\left(\frac{30}{5}\right)$$

$$= \ln(6)$$

Exercice 3

Le graphique ci-contre donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 4$



On admet que les courbes Cf et Cg se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

Déterminer l'aire A du domaine compris entre ces 2 courbes.

f est une fonction affine, représentée par la droite et g est une fonction trinôme, représentée par la parabole et d'après le graphique, $\mathrm{C}f$ est au-dessus de $\mathrm{C}g$ sur [0 ; 3] ,

Ainsi A = $\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^3 \big((-x+4) - (x^2 - 4x + 4)\big)dx = \int_0^3 (-x + 4 - x^2 + 4x - 4))\, dx$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2\right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \times 3^3 + \frac{3}{2} \times 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right)$$

$$= \frac{9}{2}\quad u.a$$

Exercice 4

A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale

I = $\int_1^3 4xln(x)dx$

I = $\int_1^3 4xln(x)dx = \int_1^3 u'(x) \times v(x)dx$

$en\ posant\ \ u'(x) = 4x \quad et \quad v(x) = \ln(x)$

$alors \qquad u(x) = 2x^2 \qquad et \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

en appliquant la formule d'intégration par parties , $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]\,_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

on obtient,

I = $\int_1^3 4xln(x)\, dx = \ [2x^2 \times \ln(x)\,]_1^3 - \int_1^3 2x^2 \times \frac{1}{x}\, dx$

= $(2 \times 3^2 \times \ln(3) - 2 \times 1^2 \times \ln(1)\ ) - \int_1^3 2x\, dx$

= $18\ln(3) - \ [x^2]\,_1^3$

= $18\ln(3) - (\ 3^2 - 1^2)$

= $\mathbf{18\ln(3) - 8}$