Term Spé Maths	interrogation n° 2		
		Sujet A	*le 13.10.2023*

Cours :
a/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

b/ (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n. Traduire par une inégalité l'affirmation suivante :
La suite (u_n) est minorée par 5 Pour tout entier n, $u_n \geq 5$

Exercice 1
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 9$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 18$

Initialisation : On a $u_0 = 8$ donc , $0 \leq u_0 \leq 18$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $0 \leq u_k \leq 18$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} \leq 18$

Or $0 \leq u_k \leq 18$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5 \times 0 \leq 0{,}5u_k \leq 0{,}5 \times 18$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5 \times 0 + 9 \leq 0{,}5u_k + 9 \leq 0{,}5 \times 18 + 9$

$\Leftrightarrow$ $9 \leq u_{k+1} \leq 18$ $\Leftrightarrow$ $0 \leq u_{k+1} \leq 18$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion :
la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq 18$

Exercice 2
On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$
a/ Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$ et $u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$

b/ On donne la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$

Si $v_n = u_n - 3$ *alors*

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= 2u_n - 3 - 3$

$= 2u_n - 6$

$= 2(v_n + 3) - 6$ car $u_n = v_n + 3$

$= 2v_n + 6 - 6$

$= 2v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 2 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n
Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 2 et de 1er terme $v_0 = 1$ alors $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 2^n$

or $u_n = v_n + 3$ donc $u_n = 1 \times 2^n + 3 = 2^n + 3$

Term Spé Maths interrogation n° 2	Sujet B *le 13.10.2023*

Cours :

a/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

b/ (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n. Traduire par une inégalité l'affirmation suivante :
La suite (u_n) est minorée par 5 Pour tout entier n, $u_n \geq 5$

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 8$
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $20 \leqslant u_n \leqslant 60$

Initialisation : On a $u_0 = 50$ donc , $20 \leq u_0 \leq 60$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $20 \leq u_k \leq 60$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $20 \leq u_{k+1} \leq 60$

Or $20 \leq u_k \leq 60$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6 \times 20 \leq 0{,}6u_k \leq 0{,}6 \times 60$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6 \times 20 + 8 \leq 0{,}6u_k + 8 \leq 0{,}6 \times 60 + 8$

$\Leftrightarrow$ $20 \leq u_{k+1} \leq 44$ $\Leftrightarrow$ $20 \leq u_{k+1} \leq 60$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion :
la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n, on a $20 \leq u_n \leq 60$

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$
a/ Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 3 \times u_0 - 4 = 3 \times 5 - 4 = 11$ et $u_2 = 3 \times u_1 - 4 = 3 \times 11 - 4 = 29$

b/ On donne la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 2$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1[er] terme.

$v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$

Si $v_n = u_n - 2$ *alors*

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$= 3u_n - 4 - 2$

$= 3u_n - 6$

$= 3(v_n + 2) - 6$ car $u_n = v_n + 2$

$= 3v_n + 6 - 6$

$= 3v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 3 et de 1[er] terme $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n
Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 3 et de 1[er] terme $v_0 = 3$ alors $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n$

or $u_n = v_n + 2$ donc $u_n = 3 \times 3^n + 2 = 3^{n+1} + 2$