Term Spé Maths	interrogation n° 2 : CORRIGE	
	Sujet A	*le 10.10.2024*

Cours :

1/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

2/ (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n. Traduire par une inégalité les affirmations suivantes :

a/ La suite (u_n) est minorée par 5

Pour tout entier n, $u_n \geq 5$

b/ La suite (u_n) est croissante

Pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$ (OU $u_{n+1} - u_n \geq 0$)

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$

a/ Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 0{,}4 \times u_0 + 3 = 0{,}4 \times 2 + 3 = 3{,}8$ et $u_2 = 0{,}4 \times u_1 + 3 = 0{,}4 \times 3{,}8 + 3 = 4{,}52$

b/ Démontrer **par récurrence** que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$

Initialisation : On a $u_0 = 2$ donc , $0 \leq u_0 \leq 5$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $0 \leq u_k \leq 5$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} \leq 5$

Or $0 \leq u_k \leq 5$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4 \times 0 \leq 0{,}4u_k \leq 0{,}4 \times 5$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4 \times 0 + 3 \leq 0{,}4u_k + 3 \leq 0{,}4 \times 5 + 3$

$\Leftrightarrow$ $3 \leq u_{k+1} \leq 5$ $\Leftrightarrow$ $0 \leq u_{k+1} \leq 5$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion :

la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq 5$

c/ En déduire que la suite (u_n) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = 0{,}4u_n + 3 - u_n = -0{,}6u_n + 3$

Or $u_n \leq 5$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n \geq -0{,}6 \times 5$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n + 3 \geq -0{,}6 \times 5 + 3$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n + 3 \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante

Term Spé Maths	interrogation n° 2 CORRIGE	
		Sujet B *le 10.10.2024*

Cours :

1/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

2/ (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n. Traduire par une inégalité les affirmations suivantes :

a/ La suite (u_n) est majorée par 2

Pour tout entier n, $u_n \leq 2$

b/ La suite (u_n) est décroissante

Pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$ (OU $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 8$

a/ Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 0{,}6 \times u_0 + 8 = 0{,}6 \times 50 + 8 = 38$ et $u_2 = 0{,}6 \times u_1 + 8 = 0{,}6 \times 38 + 8 = 30{,}8$

b/ Démontrer **par récurrence** que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $20 \leqslant u_n \leqslant 60$

Initialisation : On a $u_0 = 50$ donc , $20 \leq u_0 \leq 60$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $20 \leq u_k \leq 60$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $20 \leq u_{k+1} \leq 60$

Or $20 \leq u_k \leq 60$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6 \times 20 \leq 0{,}6u_k \leq 0{,}6 \times 60$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6 \times 20 + 8 \leq 0{,}6u_k + 8 \leq 0{,}6 \times 60 + 8$

$\Leftrightarrow$ $20 \leq u_{k+1} \leq 44$ $\Leftrightarrow$ $20 \leq u_{k+1} \leq 60$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion :

la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n, on a $20 \leq u_n \leq 60$

c/ En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

$u_{n+1} - u_n = 0{,}6u_n + 8 - u_n = -0{,}4u_n + 8$

Or $u_n \geq 20$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n \leq -0{,}4 \times 20$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n + 8 \leq -0{,}4 \times 20 + 8$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n + 8 \leq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante