

Cours :

a/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

b/ Traduire chaque propriété par une inégalité :

La suite (u_n) est minorée par 5 **Pour tout entier n , $u_n \geq 5$**

La suite (u_n) est décroissante **Pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$**

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 9$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 18$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 8$ donc, $0 \leq u_0 \leq 18$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $0 \leq u_k \leq 18$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} \leq 18$

$$\text{Or } 0 \leq u_k \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \times 0 \leq 0,5u_k \leq 0,5 \times 18$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \times 0 + 9 \leq 0,5u_k + 9 \leq 0,5 \times 18 + 9$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq u_{k+1} \leq 18 \quad \Leftrightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 18 \quad \text{donc l'hérédité est démontrée}$$

Conclusion :

la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n , on a $0 \leq u_n \leq 18$

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$

a/ Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5 \quad \text{et} \quad u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

b/ On donne la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

$$v_n = u_n - 3 \quad \text{donc } u_n = v_n + 3$$

Si $v_n = u_n - 3$ alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$

$$= 2u_n - 3 - 3$$

$$= 2u_n - 6$$

$$= 2(v_n + 3) - 6 \quad \text{car } u_n = v_n + 3$$

$$= 2v_n + 6 - 6$$

$$= 2v_n \quad \text{donc } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 2 \quad \text{et de 1^{er} terme } v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^{er} terme $v_0 = 1$

$$\text{alors } v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n \quad \text{or } u_n = v_n + 3 \quad \text{donc } u_n = 1 \times 2^n + 3 = 2^n + 3$$

Cours :

a/ Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

b/ Traduire chaque propriété par une inégalité :

La suite (u_n) est minorée par 5 **Pour tout entier n , $u_n \geq 5$**

La suite (u_n) est croissante **Pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$**

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $20 \leq u_n \leq 60$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 50$ donc, $20 \leq u_0 \leq 60$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $20 \leq u_k \leq 60$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $20 \leq u_{k+1} \leq 60$

$$\text{Or } 20 \leq u_k \leq 60$$

$$\Leftrightarrow 0,6 \times 20 \leq 0,6u_k \leq 0,6 \times 60$$

$$\Leftrightarrow 0,6 \times 20 + 8 \leq 0,6u_k + 8 \leq 0,6 \times 60 + 8$$

$$\Leftrightarrow 20 \leq u_{k+1} \leq 44 \quad \Leftrightarrow \quad 20 \leq u_{k+1} \leq 60 \quad \text{donc l'hérédité est démontrée}$$

Conclusion :

la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n , on a $20 \leq u_n \leq 60$

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 3u_n - 4$

a/ Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = 3 \times u_0 - 4 = 3 \times 5 - 4 = 11 \quad \text{et} \quad u_2 = 3 \times u_1 - 4 = 3 \times 11 - 4 = 29$$

b/ On donne la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 2$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

$$v_n = u_n - 2 \quad \text{donc} \quad u_n = v_n + 2$$

$$\text{Si } v_n = u_n - 2 \quad \text{alors}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$$

$$= 3u_n - 4 - 2$$

$$= 3u_n - 6$$

$$= 3(v_n + 2) - 6 \quad \text{car } u_n = v_n + 2$$

$$= 3v_n + 6 - 6$$

$$= 3v_n \quad \text{donc } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 3 \quad \text{et de 1^{er} terme } v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de 1^{er} terme $v_0 = 3$

$$\text{alors } v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1} \quad \text{or} \quad u_n = v_n + 2 \quad \text{donc} \quad u_n = 3 \times 3^n + 2 = 3^{n+1} + 2$$