Term Spé Maths	interrogation n° 2 : Sujet A CORRIGE

Cours :

1. Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

2. Traduire par une inégalité les affirmations suivantes :

a/ La suite (u_n) est minorée par 5 $u_n \geq 5$

b/ La suite (u_n) est majorée par -2 $u_n \leq -2$

c/ La suite (u_n) est décroissante $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

QCM :

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel pour laquelle $u_0 = \frac{1}{3}$

1/ Si (u_n) est majorée par $\frac{7}{3}$ alors on peut affirmer que :

c/ (u_n) est majorée par 3 car $3 > \frac{7}{3}$

2/ Si (u_n) est croissante alors on peut affirmer que :

b/ (u_n) est minorée par $\frac{1}{3}$ car une suite est croissante est minorée par son 1er terme

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 9$

a/ Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 0{,}4 \times u_0 + 9 = 0{,}4 \times 5 + 9 = 11$ et $u_2 = 0{,}4 \times u_1 + 9 = 0{,}4 \times 11 + 9 = 13{,}4$

b/ Démontrer **par récurrence** que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n \leqslant 15$

Initialisation : On a $u_0 = 5$ donc $u_0 \leq 15$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 15$
et on cherche alors à démontrer que $u_{k+1} \leq 15$

Or $u_k \leq 15$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4u_k \leq 0{,}4 \times 15$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4u_k + 9 \leq 0{,}4 \times 15 + 9$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 15$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion :
la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a $u_n \leq 15$

c/ Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

1ère méthode :

$u_{n+1} - u_n = 0{,}4u_n + 9 - u_n = -0{,}6u_n + 9$

Or $u_n \leq 15$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n \geq -0{,}6 \times 15$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n + 9 \geq -0{,}6 \times 15 + 9$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}6u_n + 9 \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante

2ème méthode : on peut démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 11$ donc $u_1 \geq u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_{k+1} \geq u_k$
et on cherche alors à démontrer que $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Or $u_{k+1} \geq u_k$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4u_{k+1} \geq 0{,}4u_k$

$\Leftrightarrow$ $0{,}4u_{k+1} + 9 \geq 0{,}4u_k + 9$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ ce qui prouve que la suite est croissante.

Term Spé Maths	interrogation n° 2 : Sujet B CORRIGE

Cours :

1. Donner le nom des étapes de la démonstration par récurrence. **Initialisation , Hérédité , conclusion**

2. Traduire par une inégalité les affirmations suivantes :
a/ La suite (u_n) est minorée par -5 $u_n \geq 5$
b/ La suite (u_n) est croissante. $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$)
c/ La suite (u_n) est majorée par 2 $u_n \leq 2$

QCM :

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel pour laquelle $u_0 = \frac{2}{3}$

1/ Si (u_n) est minorée par $\frac{3}{7}$ alors on peut affirmer que :

a/ (u_n) est minorée par $\frac{1}{3}$ car $\frac{1}{3} < \frac{3}{7}$

2/ Si (u_n) est décroissante alors on peut affirmer que :

b/ (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ car une suite décroissante est majorée par son 1er terme

Exercice

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 8$

a/ Calculer u_1 et u_2
$u_1 = 0{,}6 \times u_0 + 8 = 0{,}6 \times 50 + 8 = 38$ et $u_2 = 0{,}6 \times u_1 + 8 = 0{,}6 \times 38 + 8 = 30{,}8$

b/ Démontrer **par récurrence** que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n \geqslant 20$

Initialisation : On a $u_0 = 50$ donc , $u_0 \geq 20$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \geq 20$
et on cherche alors à démontrer que $u_{k+1} \geq 20$

Or $u_k \geq 20$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6u_k \geq 0{,}6 \times 20$

$\Leftrightarrow$ $0{,}6u_k + 8 \geq 0{,}6 \times 20 + 8$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \geq 20$ $\Leftrightarrow$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion :
la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence pour tout entier n, on a $u_n \geq 20$

c/ Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

1ère méthode :

$u_{n+1} - u_n = 0{,}6u_n + 8 - u_n = -0{,}4u_n + 8$

Or $u_n \geq 20$
$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n \leq -0{,}4 \times 20$
$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n + 8 \leq -0{,}4 \times 20 + 8$
$\Leftrightarrow$ $-0{,}4u_n + 8 \leq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

2ème méthode : on peut démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 50$ et $u_1 = 38$ donc $u_1 \leq u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_{k+1} \leq u_k$
et on cherche alors à démontrer que $u_{k+2} \leq u_{k+1}$

Or $u_{k+1} \leq u_k$
$\Leftrightarrow$ $0{,}6u_{k+1} \leq 0{,}6u_k$
$\Leftrightarrow$ $0{,}6u_{k+1} + 8 \leq 0{,}6u_k + 8$
$\Leftrightarrow$ $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leq u_n$ ce qui prouve que la suite est décroissante.