Cours

1/ Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

2/ Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne les points A (1 ; 5 ; -1) B (2 ; 1 ; 4) C (0 ; 5 ; 3) et D (6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point K milieu de [CD]

K est le milieu de [CD] donc K $\left(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2} ; \frac{z_C+z_D}{2}\right)$ soit K $\left(\frac{0+6}{2} ; \frac{5+(-3)}{2} ; \frac{3+(-3)}{2}\right)$ donc K (3 ; 1 ; 0)

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} xB-xA \\ yB-yA \\ zB-zA \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Déterminer les coordonnées du point F tel que ABFD soit un parallélogramme.

ABFD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F-6) \\ y_F-(-3) \\ z_F-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = 1 \\ y_F + 3 = -4 \\ z_F + 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 1 + 6 \\ y_F = -4 - 3 \\ z_F = 5 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 7 \\ y_F = -7 \\ z_F = 2 \end{cases}$

donc les coordonnées du point F sont (7 ; -7 ; 2).

d/ Les points A, B et C sont-ils alignés ?

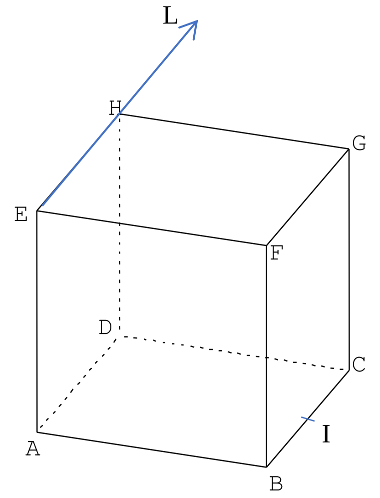
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (ABC)) e/ Démontrer que le point D appartient au plan (ABC)

D appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5\\-8\\-2\end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix}5\\-8\\-2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5 = \alpha - \beta\\ -8 = -4\alpha + 0\times\beta\\ -2 = 5\alpha + 4\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 5\\ -8 = -4\alpha\\ -4\beta = 5\alpha + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 5\\ \alpha = \frac{-8}{-4}\\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 2 - 5\\ \alpha = 2\\ \beta = \frac{5\times2+2}{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -3\\ \alpha = 2\\ \beta = -3\end{cases}$$ on a donc $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Ainsi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ ce qui prouve que le point D appartient au plan (ABC)



Exercice 2

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BC] et L est tel que $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EH}$

On se place dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}$)

a/ Donner, sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.

Dans le repère $(D;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ on a :

A (1 ; 0 ; 0)   B (1 ; 1 ; 0)   C (0 ; 1 ; 0)   D (0 ; 0 ; 0)   E (1 ; 0 ; 1)   F (1 ; 1 ; 1)   G (0 ; 1 ; 1)   H (0 ; 0 ; 1)   I (0,5 ; 1 ; 0) et L (-1 ; 0 ; 1)

b/ Les droites (LI) et (HB) sont-elles parallèles ?

Les vecteurs $\overrightarrow{LI}\begin{pmatrix}1{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{1{,}5} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-1}$ donc les droites (LI) et (BH) ne sont pas parallèles

c/ Question Bonus

En utilisant les coordonnées ou non, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont coplanaires. Que peut-on alors en déduire pour les droites (LI) et (HB) ?

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{EH} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + 2\,\overrightarrow{BI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont coplanaires.

On en déduit alors que les points B, I, H et L sont coplanaires et donc que les droites (LI) et (HB) sont coplanaires, et puisque ces 2 droites ne sont pas parallèles, alors (LI) et HB) sont coplanaires et sécantes.

Cours

1/ Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

2/ Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne les points E (1 ; 5 ; -1) F (2 ; 1 ; 4) G (0 ; 5 ; 3) et H (6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point L milieu de [FG]

L est le milieu de [FG] donc L $\left(\frac{x_F+x_G}{2} ; \frac{y_F+y_G}{2} ; \frac{z_F+z_G}{2}\right)$ soit L $\left(\frac{2+0}{2} ; \frac{1+5}{2} ; \frac{4+3}{2}\right)$ donc L $\left(1 ; 3 ; \frac{7}{2}\right)$

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} xF-xE \\ yF-yE \\ zF-zE \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Déterminer les coordonnées du point A tel que AHFE soit un parallélogramme.

AHFE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-x_A \\ -3-y_A \\ -3-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_A = 1 \\ -3 - y_A = -4 \\ -3 - z_A = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_A = 1 - 6 \\ -y_A = -4 + 3 \\ -z_A = 5 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_A = -5 \\ -y_A = -1 \\ -z_A = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 1 \\ z_A = -8 \end{cases}$

donc les coordonnées du point A sont $(5 ;\ 1 ;\ -8)$.

d/ Les points E, F et G sont-ils alignés ?

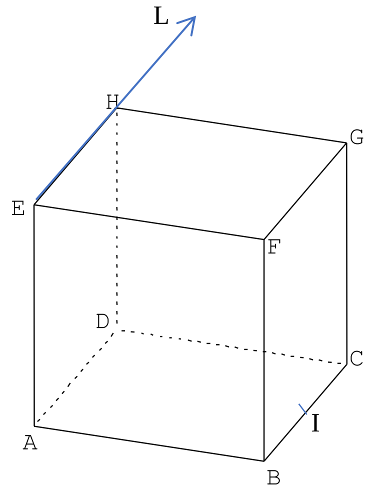
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points E, F et G ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (EFG)) e/ Démontrer que le point H appartient au plan (EFG)

H appartient au plan (EFG) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{EH} = \alpha\overrightarrow{EF} + \beta\overrightarrow{EG}$ avec $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}5\\-8\\-2\end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix}5\\-8\\-2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5 = \alpha - \beta\\ -8 = -4\alpha + 0\times\beta\\ -2 = 5\alpha + 4\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 5\\ -8 = -4\alpha\\ -4\beta = 5\alpha + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 5\\ \alpha = \frac{-8}{-4}\\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 2 - 5\\ \alpha = 2\\ \beta = \frac{5\times2+2}{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -3\\ \alpha = 2\\ \beta = -3\end{cases}$$ on a donc α = 2 et β = −3

Ainsi $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EF} - 3\overrightarrow{EG}$ ce qui prouve que le point H appartient au plan (EFG)



Exercice 2

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BC] et L est tel que $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EH}$

On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$)

a/ Donner, sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

A (0 ; 0 ; 0) B (1 ; 0 ; 0) C (1 ; 1 ; 0) D (0 ; 1 ; 0) E (0 ; 0 ; 1) F (1 ; 0 ; 1) G (1 ; 1 ; 1) H (0 ; 1 ; 1) I (1 ; 0,5 ; 0) et L (0 ; 2 ; 1)

b/ Les droites (LI) et (HB) sont-elles parallèles ?

Les vecteurs $\overrightarrow{LI}\begin{pmatrix}1\\-1{,}5\\-1\end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-1{,}5} \neq \frac{-1}{-1}$ donc les droites (LI) et (BH) ne sont pas parallèles

c/ Question Bonus

En utilisant les coordonnées ou non, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{BL}$ sont coplanaires. Que peut-on alors en déduire pour les droites (LI) et (HB) ?

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{EH} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + 2\,\overrightarrow{BI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{BL}$ sont coplanaires.

On en déduit alors que les points B, I, H et L sont coplanaires et donc que les droites (LI) et (HB) sont coplanaires, et puisque ces 2 droites ne sont pas parallèles, alors (LI) et HB) sont coplanaires et sécantes.