**Cours**

**1/** Les points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

**2/** Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

**Exercice 1**

Dans un repère de l'espace, on donne les points A (1 ; 5 ; -1) B (2 ; 1 ; 4) C ( 0 ; 5 ; 3) et D ( 6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point K milieu de [CD]

K est le milieu de [CD] donc K ( $\frac{x_C+x_D}{2}$ ; $\frac{y_C+y_D}{2}$ ; $\frac{z_C+z_D}{2}$ )

soit K ( $\frac{0+6}{2}$ ; $\frac{5+(-3)}{2}$ ; $\frac{3+(-3)}{2}$ ) donc K ( 3 ; 1 ; 0 )

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} xB-xA \\ yB-yA \\ zB-zA \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Déterminer les coordonnées du point F tel que ABFD soit un parallélogramme.

ABFD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F-6 \\ y_F-(-3) \\ z_F-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = 1 \\ y_F + 3 = -4 \\ z_F + 3 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 1 + 6 \\ y_F = -4 - 3 \\ z_F = 5 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 7 \\ y_F = -7 \\ z_F = 2 \end{cases}$

donc les coordonnées du point F sont ( 7 ; $-7$ ; 2 ).

d/ Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (ABC))

e/ Démontrer que le point D appartient au plan (ABC)

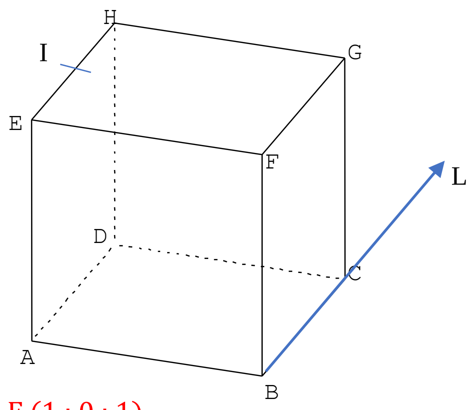
D appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \alpha - \beta \\ -8 = -4\alpha + 0 \times \beta \\ -2 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ -8 = -4\alpha \\ -4\beta = 5\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ \alpha = \frac{-8}{-4} \\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 5 \\ \alpha = 2 \\ \beta = \frac{5\times2+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$ on a

donc $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Ainsi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ ce qui prouve que le point D appartient au plan (ABC)




**Exercice 2**

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [EH] et L est tel que $\overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{BC}$

On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ )

a/ Donner, sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

A (0 ; 0 ; 0)   B ( 1 ; 0 ; 0 )   C ( 1 ; 1 ; 0)   D ( 0 ; 1 ; 0)   E ( 0 ; 0 ; 1)   F (1 ; 0 ; 1)

G ( 1 ; 1 ; 1)   H ( 0 ; 1 ; 1 )   I ( 0 ; 0,5 ; 1)  et  L (1 ; 2 ; 0)

b/ Les droites (LI) et (EC) sont-elles parallèles ?

Les vecteurs $\overrightarrow{LI}\begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-1{,}5} \neq \frac{-1}{1}$ donc les droites (LI) et (EC) ne sont pas parallèles

**c/ Question Bonus**

En utilisant les coordonnées ou non, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EI}$ *et* $\overrightarrow{EL}$ sont coplanaires. Que peut-on alors en déduire pour les droites (LI) et (EC) ?

$\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC} + 2\,\overrightarrow{EI}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{EL}$ sont coplanaires.

On en déduit alors que les points E, I, C et L sont coplanaires et donc que les droites (LI) et (EC) sont coplanaires, et puisque ces 2 droites ne sont pas parallèles, alors (LI) et (EC) sont coplanaires et sécantes.

**Cours**

**1/** Les points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

**2/** Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

**Exercice 1**

Dans un repère de l'espace, on donne les points E (1 ; 5 ; -1) F (2 ; 1 ; 4) G ( 0 ; 5 ; 3) et H ( 6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point L milieu de [FG]

L est le milieu de [FG] donc L $\left(\frac{x_F+x_G}{2} ; \frac{y_F+y_G}{2} ; \frac{z_F+z_G}{2}\right)$ soit L $\left(\frac{2+0}{2} ; \frac{1+5}{2} ; \frac{4+3}{2}\right)$ donc L $\left(1 ; 3 ; \frac{7}{2}\right)$

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} xF-xE \\ yF-yE \\ zF-zE \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Déterminer les coordonnées du point A tel que EFHA soit un parallélogramme.

EFHA est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x_A \\ -3-y_A \\ -3-z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 6 - x_A \\ -4 = -3 - y_A \\ 5 = -3 - z_A \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 - 1 \\ y_A = -3 + 4 \\ z_A = -3 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 1 \\ z_A = -8 \end{cases}$

donc les coordonnées du point A sont ( $5$ ; $1$ ; $-8$ ).

d/ Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points E, F et G ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (EFG))

e/ Démontrer que le point H appartient au plan (EFG)

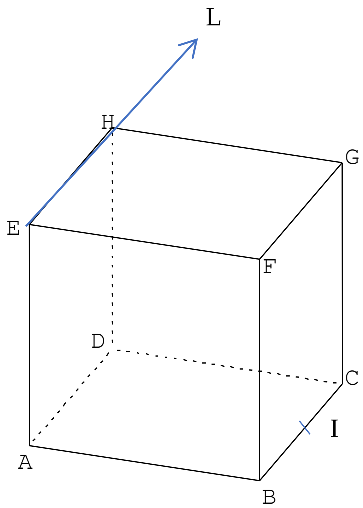
H appartient au plan (EFG) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{EH} = \alpha\overrightarrow{EF} + \beta\overrightarrow{EG}$ avec $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \alpha - \beta \\ -8 = -4\alpha + 0 \times \beta \\ -2 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ -8 = -4\alpha \\ -4\beta = 5\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ \alpha = \frac{-8}{-4} \\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 5 \\ \alpha = 2 \\ \beta = \frac{5\times2+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$ on a donc

$\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Ainsi $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EF} - 3\overrightarrow{EG}$ ce qui prouve que le point H appartient au plan (EFG)




**Exercice 2**

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BC] et L est tel que $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EH}$

On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ )

a/ Donner, sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

A (0 ; 0 ; 0)  B ( 1 ; 0 ; 0 )  C ( 1 ; 1 ; 0)  D ( 0 ; 1 ; 0)  E ( 0 ; 0 ; 1)  F (1 ; 0 ; 1)

G ( 1 ; 1 ; 1)  H ( 0 ; 1 ; 1 )  I ( 1 ; 0,5 ; 0)  et  L (0 ; 2 ; 1)

b/ Les droites (LI) et (HB) sont-elles parallèles ?

Les vecteurs $\overrightarrow{LI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-1{,}5} \neq \frac{-1}{-1}$ donc les droites (LI) et (BH) ne sont pas parallèles

**c/ Question Bonus**

En utilisant les coordonnées ou non, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{BL}$ sont coplanaires. Que peut-on alors en déduire pour les droites (LI) et (HB) ?

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{EH} + 2\,\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + 2\,\overrightarrow{BI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{BL}$ sont coplanaires.

On en déduit alors que les points B, I, H et L sont coplanaires et donc que les droites (LI) et (HB) sont coplanaires, et puisque ces 2 droites ne sont pas parallèles, alors (LI) et (HB) sont coplanaires et sécantes.