Cours

1/ Les points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

2/ Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne les points R (1 ; 5 ; -1) S (2 ; 1 ; 4) T (0 ; 5 ; 3) et U (6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point K milieu de [TU]

K est le milieu de [CD] donc K ($\frac{x_T+x_U}{2}$; $\frac{y_T+y_U}{2}$; $\frac{z_T+z_U}{2}$)

soit K ($\frac{0+6}{2}$; $\frac{5+(-3)}{2}$; $\frac{3+(-3)}{2}$) donc K (3 ; 1 ; 0)

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} x_S-x_R \\ y_S-y_R \\ z_S-z_R \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Les points R, S et T sont-ils alignés ?

Les vecteurs $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points R, S et T ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (RST))

d/ Démontrer que le point U appartient au plan (RST)

U appartient au plan (RST) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{RU} = \alpha\overrightarrow{RS} + \beta\overrightarrow{RT}$ avec $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \alpha - \beta \\ -8 = -4\alpha + 0 \times \beta \\ -2 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ -8 = -4\alpha \\ -4\beta = 5\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ \alpha = \frac{-8}{-4} \\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 5 \\ \alpha = 2 \\ \beta = \frac{5\times 2+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$ on a

donc $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Ainsi $\overrightarrow{RU} = 2\overrightarrow{RS} - 3\overrightarrow{RT}$ ce qui prouve que le point U appartient au plan (RST)

e/ Les droites (RT) et (SU) sont-elles sécantes ?

Les vecteurs $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{4} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{-7}$ donc les droites (RT) et (SU) ne sont pas parallèles.

On sait également que les points R,S,T et U sont coplanaires (car U ∈ (RST))

Ainsi, les droites **(RT) et (SU) sont coplanaires et non parallèles**, elles sont **donc sécantes**

Cours

1/ Les points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

2/ Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne les points E (1 ; 5 ; -1) F (2 ; 1 ; 4) G (0 ; 5 ; 3) et H (6 ; -3 ; -3)

a/Calculer les coordonnées du point L milieu de [FG]

L est le milieu de [FG] donc L $\left(\frac{x_F+x_G}{2} ; \frac{y_F+y_G}{2} ; \frac{z_F+z_G}{2}\right)$ soit L $\left(\frac{2+0}{2} ; \frac{1+5}{2} ; \frac{4+3}{2}\right)$ donc L $\left(1 ; 3 ; \frac{7}{2}\right)$

b/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} xF-xE \\ yF-yE \\ zF-zE \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-5 \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c/ Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{5}$ donc les points E, F et G ne sont pas alignés. (ils définissent donc le plan (EFG))

d/ Démontrer que le point H appartient au plan (EFG)

H appartient au plan (EFG) si et seulement si il existe 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{EH} = \alpha\overrightarrow{EF} + \beta\overrightarrow{EG}$ avec $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \alpha - \beta \\ -8 = -4\alpha + 0 \times \beta \\ -2 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ -8 = -4\alpha \\ -4\beta = 5\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 5 \\ \alpha = \frac{-8}{-4} \\ \beta = \frac{5\alpha+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 5 \\ \alpha = 2 \\ \beta = \frac{5\times 2+2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$ on a donc

$\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Ainsi $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EF} - 3\overrightarrow{EG}$ ce qui prouve que le point H appartient au plan (EFG)

e/ Les droites (EG) et (FH) sont-elles sécantes ?

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{4} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{4}{-7}$ donc les droites (EG) et (FH) ne sont pas parallèles.
On sait également que les points E,F,G et H sont coplanaires (car H ∈ (EFG))

Ainsi, les droites **(EG) et (FH) sont coplanaires et non parallèles**, elles sont **donc sécantes**