Terminales Spé Maths	interrogation n° 6 **CORRIGE**	le 04.02.2025

Cours : Compléter les égalités suivantes :

$ln\ (a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad$ $ln\ (a^n\ ) = n \ln(a)$

$Si\ a > 0,\ \ e^x = a\ \ équivaut\ à\ \ x = \ln(a)$

$Si\ f\ (x) = l\,n(x)\ \ alors\ f\ '(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 1
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$a)\ e^{3x} + 1 = 16$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 15$

$\Leftrightarrow 3x = \ln(15)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(15)}{3}$

$S = \{\frac{\ln(15)}{3}\}$

$b)(3e^x - 2)(lnx + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 3e^x - 2 = 0\ \ ou\ \ \ln(x) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{3}\ \ \ ou\ \ \ln(x) = -4$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)\ \ ou\ \ x = e^{-4}$

$or\ x > 0\ \ ainsi, puisque\ \ \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0\ \ \ \ S = \{\,e^{-4}\,\}$

$c)\ 12 - 2\,ln(x) \geq 8$

$\Leftrightarrow\ -2\ln(x) \geq\ -4$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{-4}{-2}$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq e^2$

$or\ x > 0\ \ donc\ \ S =]\,0\,; e^2\,]$

$d)\ ln(2x+5) +\ ln(x) = \frac{1}{2}ln(49)$

$\Leftrightarrow \ln\big((2x+5)x\big) = \ln(\sqrt{49})$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 5x) = \ln(7)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x = 7$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1\ \ ou\ \ x_2 = -\frac{7}{2}\ \ \ \ (\Delta = 81)$

$or\ x > 0\ \ donc\ \ S = \{\,1\,\}$

Exercice 2
Résoudre l'inéquation afin de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$3^n \geq 10^{2025}$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^{2025})$$

$$\Leftrightarrow n\ln(3) \geq 2025\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2025\ln(10)}{\ln(3)}$$

$$or\ \ \frac{2025\ln(10)}{\ln(3)} \approx 4244{,}2\ \ \ donc\ le\ plus\ petit\ entier\ est\ n = 4245$$

Exercice 3

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur] 0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = 5ln(x) + 3x^2 - 1 \qquad g(x) = ln\,(3x^2 + 5)$$

$f\,'(x) = 5 \times \frac{1}{x} + 3 \times 2x = \frac{5}{x} + 6x^2$ $\qquad g\,'(x) = \frac{6x}{3x^2+5}$ $\qquad car\ \ g = \ln(u) \quad donc\ g' = \frac{u'}{u}$

$avec\ \ u(x) = 3x^2 + 5$ et $u'(x) = 6x$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{5ln(x) + 10}{x}$

a/ Calculer $f\,'(x)$ et montrer que $f\,'(x) = \dfrac{-5ln(x) - 5}{x^2}$

$$f = \frac{u}{v} \quad avec \quad u(x) = 5\ln(x) + 10 \quad et \quad v(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{5}{x} \qquad v'(x) = 1$$

$$or\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad donc\ \ f'(x) = \frac{\frac{5}{x} \times x - (5\ln(x) + 10) \times 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln(x) - 10}{x^2} = \frac{-5\ln(x) - 5}{x^2}$$

b/ Etudier le signe de $f\,'(x)$ et en déduire les variations de f sur] 0 ; + ∞ [

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-5\ln(x) - 5$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
x^2	$\|\|$		$+$		
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$f(e^{-1})$	$\searrow$	

$-5\ln(x) - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow -5\ln(x) \geq 5$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$

c/ Quelle est la valeur exacte du maximum de f sur] 0 ; + ∞ [?

$$le\ maximum\ de\ f\ est\ f(e^{-1}) = \frac{5\ln(e^{-1}) + 10}{e^{-1}} = \frac{5 \times (-1) + 10}{e^{-1}} = \frac{5}{\frac{1}{e}} = 5e$$