

Cours : Compléter les égalités suivantes :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

Si $a > 0$, $e^x = a$ équivaut à $x = \ln(a)$

Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $e^{3x} + 1 = 16$

$$\Leftrightarrow e^{3x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 3x = \ln(15)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(15)}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\ln(15)}{3} \right\}$$

b) $(3e^x - 2)(\ln x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 3e^x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = e^{-4}$$

or $x > 0$ ainsi, puisque $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ $S = \{e^{-4}\}$

c) $12 - 2 \ln(x) \geq 8$

$$\Leftrightarrow -2 \ln(x) \geq -4$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{-4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

or $x > 0$ donc $S =]0; e^2]$

d) $\ln(2x + 5) + \ln(x) = \frac{1}{2} \ln(49)$

$$\Leftrightarrow \ln((2x + 5)x) = \ln(\sqrt{49})$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 5x) = \ln(7)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x = 7$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{7}{2} \quad (\Delta = 81)$$

or $x > 0$ donc $S = \{1\}$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation afin de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$3^n \geq 10^{2025}$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^{2025})$$

$$\Leftrightarrow n \ln(3) \geq 2025 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2025 \ln(10)}{\ln(3)}$$

or $\frac{2025 \ln(10)}{\ln(3)} \approx 4244,2$ donc le plus petit entier est $n = 4245$

Exercice 3

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5\ln(x) + 3x^2 - 1$$

$$g(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{x} + 3 \times 2x = \frac{5}{x} + 6x^2$$

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2+5}$$

car $g = \ln(u)$ donc $g' = \frac{u'}{u}$
avec $u(x) = 3x^2 + 5$ et $u'(x) = 6x$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5\ln(x) + 10}{x}$

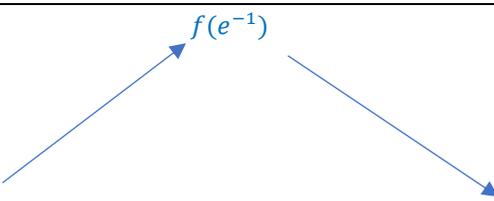
a/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-5\ln(x) - 5}{x^2}$

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad u(x) = 5\ln(x) + 10 \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{5}{x} \quad v'(x) = 1$$

$$\text{or} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{\frac{5}{x} \times x - (5\ln(x) + 10) \times 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln(x) - 10}{x^2} = \frac{-5\ln(x) - 5}{x^2}$$

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$-5\ln(x) - 5$		+	0 -
x^2		+	
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(e^{-1})$ 	

$$-5\ln(x) - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -5\ln(x) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

c/ Quelle est la valeur exacte du maximum de f sur $]0; +\infty[$?

$$\text{le maximum de } f \text{ est } f(e^{-1}) = \frac{5\ln(e^{-1}) + 10}{e^{-1}} = \frac{5 \times (-1) + 10}{e^{-1}} = \frac{5}{\frac{1}{e}} = 5e$$