Terminales Spé Maths interrogation n° 6 : sujet A CORRIGE

1. les vecteurs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{5}{3}$ donc les points A, C et E ne sont pas alignés et définissent le plan (ACE)

2. $BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 + (z_E - z_B)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-5)^2 + (4-(-7))^2} = \sqrt{131}$

3. a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CE} = 3 \times (-2) + (-6) \times 3 + 3 \times 8 = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + (-6) \times (-1) + 3 \times 5 = 0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux

Ainsi, on a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CE} = 0$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc la droite (BC) est orthogonale aux 2 droites (CE) et (AC), sécantes en C dans le plan (ACE), donc la droite (BC) est orthogonale au plan (ACE)

c) Puisque (BC) est orthogonale au plan (ACE) et que C appartient au plan (ACE) alors C est le projeté orthogonal de B sur (ACE)

d) la distance du point B au plan (ACE) est alors BC $= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

4. D'après 3.b), on sait que $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACE) donc tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ est aussi un vecteur normal au plan (ACE)

or $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}4,5\\-9\\4,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{4,5}{3} = \frac{-9}{-6} = \frac{4,5}{3} = 1,5$

donc $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur normal au plan (ACE)

remarque : il est évident que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$

BONUS :

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACE) donc D (0 ; -1 ; -1) appartient au plan (ACE) si et seulement si $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$ (ou si $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0$ ou si $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ED} = 0$)

or avec $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0 \times 3 + (-1) \times (-6) + (-2) \times 3 = 0$ donc D $\in$ (ACE)

Terminales Spé Maths interrogation n° 6 : sujet B CORRIGE

1. les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-3\\-8\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{-3} \neq \frac{-5}{-8}$ donc les points A, D et E ne sont pas alignés et définissent le plan (ADE)

2. $AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{77}$

3. a) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DE} = 2\times 3 + (-4)\times 0 + 2\times(-3) = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux

b) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = 2\times(-1) + (-4)\times(-3) + 2\times(-5) = 0$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

Ainsi, on a $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DE} = 0$ et $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc la droite (BE) est orthogonale aux 2 droites (DE) et (AD), sécantes en D dans le plan (ADE), donc la droite (BE) est orthogonale au plan (ADE)

c) Puisque (BE) est orthogonale au plan (ADE) et que E appartient au plan (ADE) alors E est le projeté orthogonal de B sur (ADE)

d) la distance du point B au plan (ADE) est alors BE $= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

4. D'après 3.b), on sait que $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ADE) donc tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{BE}$ est aussi un vecteur normal au plan (ADE)

or $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{3}{2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

donc $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (ADE)

remarque : il est évident que $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}6{,}5\\2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$

BONUS :

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ADE) donc C (0 ; 0 ; 1) appartient au plan (ADE) si et seulement si $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC} = 0$ (ou si $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DC} = 0$ ou si $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{EC} = 0$)

or avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) + (-4)\times(-2) + 2\times(-3) = 0$ donc C $\in$ (ADE)