Terminales Spécialité Maths G3 interrogation n°7 le 27.01.2023

NOM :

Prénom :

Cours : Compléter les égalités suivantes :

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\ln(a^n) = n \ln a$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

/3

Si $a > 0$, $e^x = a$ équivaut à $x = \ln a$

Si $f(x) = ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

Applications

Exercice 1 : Résoudre dans] 0 ; + ∞ [les équations ou inéquations suivantes :

/7

a) $4ln(x) - 5 = 7$

$\Leftrightarrow 4\ln x = 12$

$\Leftrightarrow \ln x = 3$

$\Leftrightarrow x = e^3$

$S = \{e^3\}$

1,25

b) $e^{x-3} = 2$

$\Leftrightarrow x - 3 = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = 3 + \ln 2$

$S = \{3 + \ln 2\}$

1,25

c) $(e^x - 4)(lnx + 3) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 4 = 0$ ou $\ln x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 4$ ou $\ln x = -3$

$\Leftrightarrow x = \ln 4$ ou $x = e^{-3}$

$S = \{\ln 4 ; e^{-3}\}$

2,5

d) $1 - 5\ln x \geq 11$

$\Leftrightarrow -5\ln x \geqslant 10$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant \frac{10}{-5}$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant -2$

$\Leftrightarrow x \leqslant e^{-2}$

$S =]0 ; e^{-2}]$

2

Exercice 2 : Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $5 \times 1{,}02^n \geq 600$

/2

$5 \times 1{,}02^n \geqslant 600$

$\Leftrightarrow 1{,}02^n \geqslant 120$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}02^n) \geqslant \ln(120)$

$\Leftrightarrow n \ln(1{,}02) \geqslant \ln(120)$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(120)}{\ln(1{,}02)}$ or $\frac{\ln 120}{\ln 1{,}02} \approx 241{,}76$

donc le plus petit entier est $n = 242$

Exercice 3 : Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$f(x) = 3\ln x + 5x^2 - 1$ $\qquad$ $g(x) = \ln(x^2+3)$

/3

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 5 \times 2x$

$= \frac{3}{x} + 10x$ $\quad$ 1,5

$\left(= \frac{3 + 10x^2}{x} \right)$

$g'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ $\quad$ 1,5

(forme $\ln(u)$ $\quad u(x) = x^2+3$

$u'(x) = 2x$

et $\ln'(u) = \frac{u'}{u}$)

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln(x) + 10}{x}$

/5

a/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-5\ln(x) - 5}{x^2}$

b/ Etablir en justifiant le tableau de variation de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$

c/ Justifier que le maximum de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est $5e$

a) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5\ln x + 10$ $\qquad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{5}{x}$ $\qquad v'(x) = 1$

or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $f'(x) = \frac{\frac{5}{x} \times x - (5\ln x + 10) \times 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln x - 10}{x^2} = \frac{-5 - 5\ln x}{x^2}$

2

b)

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-5\ln x - 5$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	‖		$+$		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$5e$	$\searrow$	

$-5\ln x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow -5\ln x \geq 5$

$\Leftrightarrow \ln x \leq \frac{5}{-5}$

$\Leftrightarrow \ln x \leq -1$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$

2,5

c) le maximum de f est

$f(e^{-1}) = \frac{5\ln(e^{-1}) + 10}{e^{-1}} = \frac{5 \times (-1) + 10}{\frac{1}{e}} = \frac{5}{\frac{1}{e}} = 5 \times \frac{e}{1} = 5e$ $\quad$ 0,5