

Cours : Compléter les égalités suivantes :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\text{Si } a > 0, \quad e^x = a \quad \text{équivalent à} \quad x = \ln(a)$$

$$\text{Si } f(x) = \ln(x) \quad \text{alors } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$a) e^{3x} + 1 = 16$$

$$\Leftrightarrow e^{3x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 3x = \ln(15)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(15)}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\ln(15)}{3} \right\}$$

$$b) (3e^x - 2)(\ln(x) + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3e^x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = e^{-4}$$

$$\text{or } x > 0 \quad \text{ainsi, puisque } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \quad S = \{e^{-4}\}$$

$$c) 12 - 2 \ln(x) \geq 8$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln(x) \geq -4$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{-4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

$$\text{or } x > 0 \quad \text{donc } S =]0; e^2]$$

$$d) \ln(x) + \ln(2x + 6) = 3 \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x(2x + 6)) = \ln(2^3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 6x) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \text{ou} \quad x_2 = -4 \quad (\Delta = 100)$$

$$\text{or } x > 0 \quad \text{donc } S = \{1\}$$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation afin de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$3^n \geq 10^{2026}$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^{2026})$$

$$\Leftrightarrow n \ln(3) \geq 2026 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2026 \ln(10)}{\ln(3)}$$

$$\text{or } \frac{2026 \ln(10)}{\ln(3)} \approx 4246,3 \quad \text{donc le plus petit entier est } n = 4247$$

Exercice 3

Une influenceuse qui possède 120 000 abonnés estime que, dorénavant, son nombre d'abonnés va augmenter de 5 % chaque mois.

En résolvant une inéquation, déterminer le nombre de mois à attendre pour que le nombre d'abonnés de cette influenceuse dépasse 200 000.

Augmenter de 5 % revient à multiplier par 1,05. On cherche alors le plus petit entier n tel que

$$120\,000 \times 1,05^n > 200\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,05^n > \frac{200\,000}{120\,000}$$

$$\Leftrightarrow 1,05^n > \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,05^n) > \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,05) > \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,05)} \quad \text{or} \quad \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,05)} \approx 10,46 \quad \text{donc le nombre d'abonnés dépassera 200 000 dans 11 mois}$$

Exercice 4

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5\ln(x) + 3x^2 - 1$$

$$g(x) = (2x + 1)\ln(x)$$

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{x} + 3 \times 2x = \frac{5}{x} + 6x$$

$$g'(x) = 2 \times \ln(x) + (2x + 1) \times \frac{1}{x} = 2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x}$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5\ln(x) + 10}{x}$

$$\text{a/} \quad f = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad u(x) = 5\ln(x) + 10 \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{5}{x} \quad v'(x) = 1$$

$$\text{or} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{\frac{5}{x} \times x - (5\ln(x) + 10) \times 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln(x) - 10}{x^2} = \frac{-5\ln(x) - 5}{x^2}$$

b/ Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$-5\ln(x) - 5$		+	0
x^2		+	
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$f(e^{-1})$	

$$-5\ln(x) - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -5\ln(x) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

c/ Quelle est la valeur exacte du maximum de f sur $]0; +\infty[$?

$$\text{le maximum de } f \text{ est } f(e^{-1}) = \frac{5\ln(e^{-1}) + 10}{e^{-1}} = \frac{5 \times (-1) + 10}{e^{-1}} = \frac{5}{e^{-1}} = \frac{5}{\frac{1}{e}} = 5e$$

Cours : Compléter les égalités suivantes :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\text{Si } a > 0, e^x = a \text{ équivaut à } x = \ln(a)$$

$$\text{Si } f(x) = \ln(x) \text{ alors } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$a) 3e^x + 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow 3e^x = 9$$

$$\Leftrightarrow e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$S = \{ \ln(3) \}$$

$$b) (2e^x - 1)(\ln(x) + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad x = e^{-3}$$

$$\text{or } x > 0 \text{ ainsi, puisque } \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad S = \{ e^{-3} \}$$

$$c) 1 - 5 \ln(x) \geq 11$$

$$-5 \ln(x) \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{10}{-5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-2}$$

$$\text{or } x > 0 \text{ donc } S =] 0 ; e^{-2}]$$

$$d) \ln(x) + \ln(4x + 8) = 5 \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x(4x + 8)) = \ln(2^5)$$

$$\Leftrightarrow \ln(4x^2 + 8x) = \ln(32)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x = 32$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad \text{ou} \quad x_2 = -4 \quad (\Delta = 576)$$

$$\text{or } x > 0 \text{ donc } S = \{ 2 \}$$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation afin de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$2^n \geq 10^{2026}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^{2026})$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq 2026 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2026 \ln(10)}{\ln(2)}$$

$$\text{or } \frac{2026 \ln(10)}{\ln(2)} \approx 6730,2 \quad \text{donc le plus petit entier est } n = 6731$$

Exercice 3

Une influenceuse qui possède 150 000 abonnés estime que, dorénavant, son nombre d'abonnés va augmenter de 2 % chaque mois.

En résolvant une inéquation, déterminer le nombre de mois à attendre pour que le nombre d'abonnés de cette influenceuse dépasse 200 000.

Augmenter de 2 % revient à multiplier par 1,02. On cherche alors le plus petit entier n tel que

$$150\,000 \times 1,02^n > 200\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,02^n > \frac{200\,000}{150\,000}$$

$$\Leftrightarrow 1,02^n > \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,02^n) > \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,02) > \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1,02)} \quad \text{or} \quad \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1,02)} \approx 14,5 \quad \text{donc le nombre d'abonnés dépassera 200 000 dans 15 mois}$$

Exercice 4

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \ln x + 5x^2 - 1$$

$$g(x) = (3x - 2) \ln(x)$$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 5 \times 2x = \frac{3}{x} + 10x$$

$$g'(x) = 3 \times \ln(x) + (3x - 2) \times \frac{1}{x} = 3 \ln(x) + 3 - \frac{2}{x}$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3 \ln x - 3}{x}$

a/ $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3 \ln x - 3$ et $v(x) = x$

$$u'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x} \quad v'(x) = 1$$

$$\text{or} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{\frac{3}{x} \times x - (3 \ln x - 3) \times 1}{x^2} = \frac{3 - 3 \ln x + 3}{x^2} = \frac{6 - 3 \ln x}{x^2}$$

b/ Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$

x	0	e^2	$+\infty$
$6 - 3 \ln x$		+	0
x^2		+	
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$f(e^2)$	

$$6 - 3 \ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \ln x \geq -6$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \frac{-6}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

c/ Quelle est la valeur exacte du maximum de f sur $]0; +\infty[$?

$$\text{le maximum de } f \text{ est } f(e^2) = \frac{3 \ln(e^2) - 3}{e^2} = \frac{3 \times 2 - 3}{e^2} = \frac{3}{e^2}$$