Exercice 1

On donne les points A (2 ; -1 ; 3) et B (5 ; 1 ; 1)

La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et passe par A (2 ; -1 ; 3) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = 3-2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

remarque : avec B (5 ; 1 ; 1) on a $\begin{cases} x = 5+3t \\ y = 1+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Un plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $3x - y - 2z + 1 = 0$ et

un plan $\mathcal{R}$ a pour équation cartésienne $2x + 4y + z - 5 = 0$

a/ Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

b/ Le point A (2 ; 6 ; 3) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

$3x_A - y_A - 2z_A + 1 = 3\times 2 - 6 - 2\times 3 + 1 = 6 - 6 - 6 + 1 = -5 \neq 0$ donc A (2 ; 6 ; 3) n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$

c/ Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont orthogonaux.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{R}$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ or $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 3\times 2 + (-1)\times 4 + (-2)\times 1 = 0$

donc les vecteurs $\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont orthogonaux.

Exercice 3

Une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3+2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

a/ Donner les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$

Le point A (2 ; 1 ; 3) appartient à la droite $\mathcal{D}$

b/ Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

c/ Le point C (0 ; 3 ; -1) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

on cherche la valeur de t telle que $\begin{cases} 0 = 2+t \\ 3 = 1-t \\ -1 = 3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc C (0 ; 3 ; -1) appartient à la droite $\mathcal{D}$

Exercice 4

1/ Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A (3 ; 1 ; − 5) et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme : $2x-4y+6z+d=0$

or A (3 ; 1 ; − 5) $\in \mathcal{P}$ donc $2\times 3-4\times 1+6\times(-5)+d=0 \Leftrightarrow 6-4-30+d=0 \Leftrightarrow d=28$

ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x-4y+6z+28=0$

2/ On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+6 \\ y=-2t+9 \\ z = 3t-3 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

a/ Justifier que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$

or $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}=\frac{6}{3}=2$ (donc $\vec{n}=2\,\vec{u}$) donc la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

b/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$

Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est le point dont les coordonnées vérifient

$\begin{cases} x = t+6 \\ y=-2t+9 \\ z = 3t-3 \end{cases}$ avec $2x-4y+6z+28=0$

d'où $2(t+6)-4(-2t+9)+6(3t-3)+28=0$

$\Leftrightarrow 2t+12+8t-36+18t-18+28=0$

$\Leftrightarrow 28t-14=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

alors $\begin{cases} x = t+6=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2} \\ y=-2t+9=-2\times\frac{1}{2}+9=8 \\ z=3t-3=3\times\frac{1}{2}-3=-\frac{3}{2} \end{cases}$ donc K ($\frac{13}{2}$; 8 ; $-\frac{3}{2}$)

c/ Justifier que la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est égale à $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

D'après ce qui précède, K est le point de la droite $\mathcal{D}$ tel que (AK) soit orthogonale à $\mathcal{D}$ donc K est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$ donc la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est

$$AK=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-3\right)^2+(8-1)^2+\left(-\frac{3}{2}-(-5)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+7^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+49+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{294}{4}}=\frac{\sqrt{294}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{49\times 6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$$

Pour tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace.

Exercice 1

On donne les points A (3 ; 2 ; - 2) et B (5 ; 1 ; 1)
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et passe par A (3 ; 2 ; -2) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2-t \\ z = -2+3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

remarque : avec B (5 ; 1 ; 1) on a $\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Un plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $4x-2y+z+1=0$ et

un plan $\mathcal{R}$ a pour équation cartésienne $2x+3y-2z-5=0$

a/ Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

b/ Le point A (2 ; 6 ; 3) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

$4x_A-2y_A+z_A+1=4\times2-2\times6+3+1=8-12+3+1=0$ donc A (2 ; 6 ; 3) appartient au plan $\mathcal{P}$

c/ Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont orthogonaux.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{R}$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ or $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=4\times2+(-2)\times3+1\times(-2)=0$
donc les vecteurs $\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont orthogonaux.

Exercice 3

Une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -t+4 \\ z = 3t+2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

a/ Donner les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$

Le point A (2 ; 4 ; 2) appartient à la droite $\mathcal{D}$

b/ Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

c/ Le point C (0 ; 3 ; −1) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

on cherche la valeur de t telle que $\begin{cases} 0 = 2t+2 \\ 3 = -t+4 \\ -1 = 3t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$ donc C (0 ; 3 ; −1) n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$

Exercice 4

1/ Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A (3 ; 1 ; − 5) et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme : $4x - 4y + 2z + d = 0$

or A (3 ; 1 ; − 5) $\in \mathcal{P}$ donc $4 \times 3 - 4 \times 1 + 2 \times (-5) + d = 0 \Leftrightarrow 12 - 4 - 10 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $4x - 4y + 2z + 2 = 0$

2/ On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

a/ Justifier que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$

or $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = 2$ (donc $\vec{n} = 2\vec{u}$) donc la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

b/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$

Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est le point dont les coordonnées vérifient

$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases}$ avec $4x - 4y + 2z + 2 = 0$

d'où $4(2t + 1) - 4(-2t + 9) + 2(t - 3) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8t + 4 + 8t - 36 + 2t - 6 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 18t - 36 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$

alors $\begin{cases} x = 2t + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \\ y = -2t + 9 = -2 \times 2 + 9 = 5 \\ z = t - 3 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$ donc K (5 ; 5 ; −1)

c/ Justifier que la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est égale à 6

D'après ce qui précède, K est le point de la droite $\mathcal{D}$ tel que (AK) soit orthogonale à $\mathcal{D}$ donc K est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$ donc la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est

$\mathrm{AK} = \sqrt{(5-3)^2 + (5-1)^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$