

NOM :

Prénom :

Pour tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace.

Exercice 1

a/ Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A (3 ; -1 ; 5) et dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme : $3x + 2y - 4z + d = 0$

or A (3 ; -1 ; 5) $\in \mathcal{P}$ donc $3 \times 3 + 2 \times (-1) - 4 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow 9 - 2 - 20 + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$

ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $3x + 2y - 4z + 13 = 0$

b/ Le point E (1 ; 12 ; 3) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

on a $3x_E + 2y_E - 4z_E + 13 = 3 \times 1 + 2 \times 12 - 4 \times 3 + 13 = 3 + 24 - 12 + 13 = 28 \neq 0$

donc E (1 ; 12 ; 3) n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$

Exercice 2

On donne les points A (2 ; -1 ; 3) et B (5 ; 1 ; 1)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) passe par A (2 ; -1 ; 3) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

remarque : avec B (5 ; 1 ; 1) on a $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$

Exercice 3

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $4x - 4y + 2z + 2 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1/ a/ Le point C (-3 ; 13 ; -5) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

on cherche la valeur de t telle que $\begin{cases} -3 = 2t + 1 \\ 13 = -2t + 9 \\ -5 = t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc C (-3 ; 13 ; -5) appartient à la droite $\mathcal{D}$

b/ La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

or $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = 2$ (donc $\vec{n} = 2\vec{u}$) donc la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

2/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$

En déduire, en justifiant, la distance du point C au plan $\mathcal{P}$

Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est le point dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases} \text{ avec } 4x - 4y + 2z + 2 = 0$$

$$\text{d'où } 4(2t + 1) - 4(-2t + 9) + 2(t - 3) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t + 4 + 8t - 36 + 2t - 6 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{alors } \begin{cases} x = 2t + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \\ y = -2t + 9 = -2 \times 2 + 9 = 5 \\ z = t - 3 = 2 - 3 = -1 \end{cases} \text{ donc K (5 ; 5 ; -1)}$$

D'après ce qui précède, les points C et K sont deux points de la droite $\mathcal{D}$ donc (CK) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

or K appartient au plan $\mathcal{P}$ donc K est le projeté orthogonal de C sur du plan $\mathcal{P}$ donc la distance du point C au plan $\mathcal{P}$ est

$$CK = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (5 - 13)^2 + (-1 - (-5))^2} = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{144} = 12$$

NOM :

Prénom :

Pour tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace.

Exercice 1

a/ Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A (3 ; 2 ; -4) et dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme : $2x - 4y + 5z + d = 0$

or A (3 ; 2 ; -4) $\in \mathcal{P}$ donc $2 \times 3 - 4 \times 2 + 5 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow 6 - 8 - 20 + d = 0 \Leftrightarrow d = 22$

ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - 4y + 5z + 22 = 0$

b/ Le point C (1 ; 12 ; 3) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

on a $2x_C - 4y_C + 5z_C + 22 = 2 \times 1 - 4 \times 12 + 5 \times 3 + 22 = 2 - 48 + 15 + 22 = -9 \neq 0$

donc C (1 ; 12 ; 3) n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$

Exercice 2

On donne les points A (3 ; 2 ; -2) et B (5 ; 1 ; 1)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) passe par A (3 ; 2 ; -2) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

remarque : avec B (5 ; 1 ; 1) on a $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$

Exercice 3

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $6x - 3y + 3z + 30 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 4 \\ z = t + 2 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1/ a/ Le point E (0 ; 5 ; 1) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

on cherche la valeur de t telle que $\begin{cases} 0 = 2t + 2 \\ 5 = -t + 4 \\ 1 = t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ donc E (0 ; 5 ; 1) appartient à la droite $\mathcal{D}$

b/ La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

or $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{3}{1} = 3$ (donc $\vec{n} = 3\vec{u}$) donc la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

2/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$

En déduire, en justifiant, la distance du point E au plan $\mathcal{P}$

Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est le point dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 4 \\ z = t + 2 \end{cases} \text{ avec } 6x - 3y + 3z + 30 = 0$$

$$\text{d'où } 6(2t + 2) - 3(-t + 4) + 3(t + 2) + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12t + 12 + 3t - 12 + 3t + 6 + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{alors } \begin{cases} x = 2t + 2 = 2 \times (-2) + 2 = -2 \\ y = -t + 4 = -(-2) + 4 = 6 \\ z = t + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \text{ donc K (-2 ; 6 ; 0)}$$

D'après ce qui précède, les points E et K sont deux points de la droite $\mathcal{D}$ donc (EK) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

or K appartient au plan $\mathcal{P}$ donc K est le projeté orthogonal de E sur du plan $\mathcal{P}$ donc la distance du point E au plan $\mathcal{P}$ est

$$EK = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (6 - 5)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$