NOM :

Prénom :

Cours : Compléter les énoncés suivants :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Exercice 1

f est une fonction définie sur $]\ 2\ ;+\infty\ [$ et on note C_f sa courbe représentative. Compléter les phrases suivantes :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$

Si $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe C_f

Ex2

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2x + 2 = +\infty$

(somme) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 2x + 2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} 5 - 2x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} x - 3 = 0^+$ (car $x > 3$ donc $x - 3 > 0$)

(quotient) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{5-2x}{x-3} = -\infty$

c) $\frac{1+\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

(somme) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0$

d) $e^x - x^2 + 2 = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} -1 = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} = +\infty$ (somme)

(produit) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^2 + 2 = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} 15 = 15$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + 2e^x = 3$

(car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$)

$\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{15}{3+2e^x} = \dfrac{15}{3} = 5$

(quotient)

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5 + x^2 = +\infty$ et en posant $X = 5 + x^2$,

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(5+x^2) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

Ex3 $f(x) = (1-x)\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$

a) en 0 :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 - x = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

$\left.\right\}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

(produit)

en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)\ln(x) = -\infty$

(produit)

b) Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C_f

donc la courbe admet bien au moins une asymptote, il a raison.