

NOM :

Prénom :

Cours : Compléter les énoncés suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

Exercice 1

f est une fonction définie sur $]2; +\infty[$ et on note C_f sa courbe représentative. Compléter les phrases suivantes :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe C_f

Ex 2

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 2 = +\infty$

(somme)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 - 2x + 2 = +\infty$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 5 - 2x = -1$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x - 3 = 0^+$
 (car $x > 3$ donc $x - 3 > 0$)

(quotient)
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{5 - 2x}{x - 3} = -\infty$

c) $\frac{1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
 par croissance comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

(somme)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = 0$

d) $e^x - x^2 + 2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} \right)$ pour $x \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissance comparées
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

(produit)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2 + 2 = +\infty$

(somme)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} = +\infty$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} 15 = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + 2e^x = 3$$

(car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15}{3 + 2e^x} = \frac{15}{3} = 5$$

(quotient)

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + x^2 = +\infty \quad \text{et en posant } X = 5 + x^2,$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(5 + x^2) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

Ex 3 $f(x) = (1-x)\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

a) en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - x = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

(produit)

en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)\ln(x) = -\infty$$

(produit)

b) Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x=0$

est asymptote verticale à la courbe f

donc la courbe admet bien au moins une asymptote, il a raison.