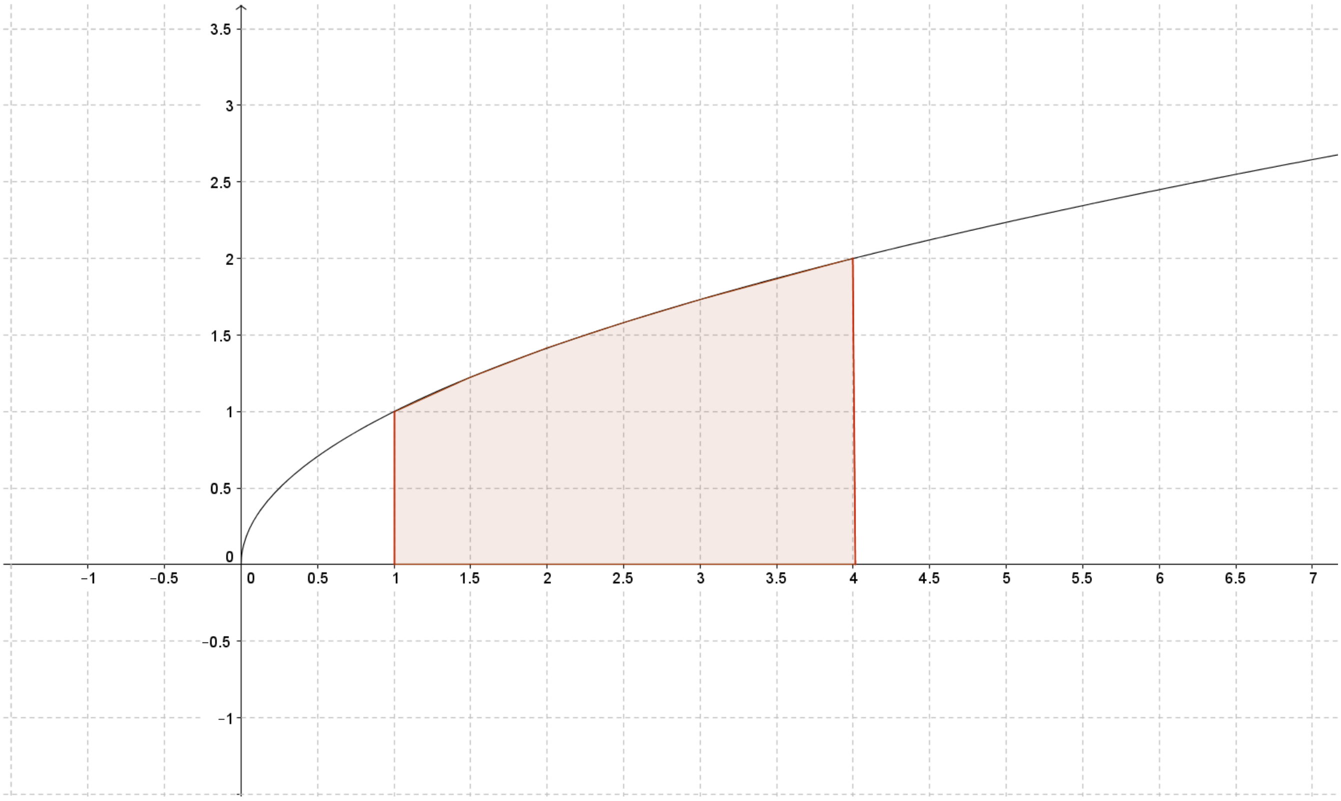
N°51 p 262

$f(x) = \sqrt{x}$

1.



2. I $=\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx$

On ne connaît pas de primitive de la fonction racine carrée donc on ne peut pas calculer directement l'intégrale. On va donc utiliser la méthode d'intégration par parties, mais puisqu'il n'y a qu'une seule expression ($\sqrt{x}$), l'astuce va être d'écrire que $\sqrt{x} = 1 \times \sqrt{x}$ afin de faire apparaître 2 expressions : une pour $u'(x)$ et l'autre pour $v(x)$

On a alors $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (1 \times \sqrt{x})dx$ et on pose $u'(x) = 1 \;\; et \;\; v(x) = \sqrt{x}$

$alors \;\; u(x) = x \;\; et \;\; v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

En appliquant la formule d'intégration par parties , $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

On obtient

$$I = \int_1^4 1 \times \sqrt{x}dx = [x\sqrt{x}]_1^4 - \int_1^4 (x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}) \, dx$$

$$= (4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}) - \int_1^4 (\frac{x}{2\sqrt{x}}) \, dx$$

$$= 7 - \int_1^4 (\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}) \, dx$$ car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ (autre astuce !)

$$= 7 - \int_1^4 (\frac{\sqrt{x}}{2}) \, dx$$

$$= 7 - \frac{1}{2} \times \int_1^4 \sqrt{x} \, dx$$ *on retrouve $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$ qui est l'intégrale I que l'on cherche à calculer*

$$= 7 - \frac{1}{2} \times I$$ *l'intégration par parties a donc permis ici d'exprimer I en fonction de I*

b. On a donc obtenu l'égalité $I = 7 - \frac{1}{2}I$

$$\Leftrightarrow I + \frac{1}{2} \times I = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}I = 7$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{7}{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow I = 7 \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{14}{3}$$

(on a donc obtenu la valeur de I sans réellement calculer I)

3. L'aire du domaine (coloré sur le graphique) compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$ est $\int_1^4 f(x)dx = I$ donc cette aire vaut $\frac{14}{3}$ $u.a$

Et ici, **l'unité d'aire est l'aire d'un carré** dont les côtés correspondent à 2 grands carreaux, donc le « carré unitaire » est un carré de côté 1,6 cm (2 carreaux de longueur 0,8 cm),

donc **l'unité d'aire est 1,6 ^{2} cm^2= 2,56 cm^2**

et , puisque $I = \frac{14}{3}\ u.a$ alors l'aire colorée vaut $\frac{14}{3} \times 2{,}56 \approx 11{,}947\ cm^2$