Term Spé Maths **Exercices sur** les suites CORRIGE

**Exercice 1 :**

**1** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_0 = 3$ et par $u_{n+1} = 4u_n$. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**2** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_0 = -2$ et par $u_{n+1} = 0{,}2u_n$. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**Exercice 2 :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $p_0 = 5$ et pour tout entier $n$, $p_{n+1} = 1{,}5p_n - 2$
On donne $v_n = p_n - 4$

a/ Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.
$v_n = p_n - 4$ donc $p_n = v_n + 4$

Si $v_n = p_n - 4$ *alors*

$v_{n+1} = p_{n+1} - 4$

$= 1{,}5p_n - 2 - 4$

$= 1{,}5p_n - 6$

$= 1{,}5(v_n + 4) - 6$ car $p_n = v_n + 4$

$= 1{,}5v_n + 6 - 6$

$= 1{,}5v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q = 1,5

et de 1er terme $v_0 = p_0 - 4 = 5 - 4 = 1$

b/ déterminer l'expression de $v_n$ puis celle de $p_n$ en fonction de $n$.

Puisque $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q = 1,5 et de 1er terme $v_0 = 1$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 1{,}5^n = 1{,}5^n$

or $p_n = v_n + 4$

donc $p_n = 1{,}5^n + 4$

c/ calculer $p_{20}$

$p_{20} = 1{,}5^{20} + 4 \approx 3\,329{,}26$

**Exercice 3 :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 3u_n - 12$
On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 6$.

a/ Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
$v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$

Si $v_n = u_n - 6$ *alors*

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$= 3u_n - 12 - 6$

$= 3u_n - 18$

$= 3(v_n + 6) - 18$ car $u_n = v_n + 6$

$= 3v_n + 18 - 18$

$= 3v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q $= 3$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$

b/ En déduire l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.
Puisque $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q $= 3$ et de 1er terme $v_0 = 2$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$

or $u_n = v_n + 6$

donc $u_n = 2 \times 3^n + 6$

c/ En utilisant l'expression précédente, démontrer que la suite $(u_n)$ est minorée par 6

$u_n - 6 = 2 \times 3^n + 6 - 6 = 2 \times 3^n$

or $2 > 0$ et $3^n > 0$ donc $u_n - 6 > 0$ donc $u_n > 6$ ce qui prouve que $(u_n)$ est minorée par 6

d/ Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante

**Exercice 4 :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$
On donne $v_n = u_n - 2$
a/ Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.
$v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$

Si $v_n = u_n - 2$ *alors*

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$= 3u_n - 4 - 2$

$= 3u_n - 6$

$= 3(v_n + 2) - 6$ car $u_n = v_n + 2$

$= 3v_n + 6 - 6$

$= 3v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q $= 3$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$

b/ déterminer l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.
Puisque $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q $= 3$ et de 1er terme $v_0 = 1$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$

or $u_n = v_n + 2$

donc $u_n = 1{,}5^n + 2$

c/ calculer $u_{12}$

$u_{12} = 1{,}5^{12} + 2 \approx 131,746$

**Exercice 5 :**

On considère la suite définie par $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 3{,}2 \quad et \quad u_0 = 5$
On donne $v_n = u_n - 4$
a/ Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.
$v_n = u_n - 4$ donc $u_n = v_n + 4$

Si $v_n = u_n - 4 \quad alors$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

$= 0{,}2u_n + 3{,}2 - 4$

$= 0{,}2u_n - 0{,}8$

$= 0{,}2(v_n + 4) - 0{,}8$

$= 0{,}2v_n + 0{,}8 - 0{,}8$

$= 0{,}2v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q = 0,2

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$

b/ déterminer l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.
Puisque $(v_n)$ est une suite géométrique de raison q = 0,2 et de 1er terme $v_0 = 1$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 0{,}2^n = 0{,}2^n$

or $u_n = v_n + 4$

donc $u_n = 0{,}2^n + 4$

c/ Calculer $u_{100}$

$u_{100} = 0{,}2^{100} + 4 \approx 4$

**Exercice 6 :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$

Montrer **par récurrence** que pour tout entier $n$, $u_n \leq 4$

Initialisation : On a $u_0 = 3$ donc $u_0 \leq 4$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 4$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 4$

or $u_k \leq 4$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5\, u_k \leq 2$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5u_k + 2 \leq 4$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 4$ donc l'hérédité et démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire donc pour tout entier n on a $u_n \leq 4$

**Exercice 7 :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 4$

Montrer **par récurrence** que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 5

- il faut d'abord démontrer par récurrence que **$(u_n)$ est décroissante**, c'est-à-dire que pour tout entier $n$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$

*Initialisation* : On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \frac{1}{5} \times 10 + 4 = 6$ donc $u_1 \leq u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

*Hérédité* : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_{k+1} \leq u_k$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire, $u_{k+2} \leq u_{k+1}$

Or $u_{k+1} \leq u_k$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{5}u_{k+1} \leq \frac{1}{5}u_k$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{5}u_{k+1} + 4 \leq \frac{1}{5}u_k + 4$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc l'hérédité est démontrée

*Conclusion* : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire

donc pour tout entier $n$, on a $u_{n+1} \leq u_n$ ce qui prouve que la suite est croissante.

- il faut ensuite démontrer par récurrence que **$(u_n)$ est minorée par 5**, c'est-à-dire que pour tout entier $n$, $\boldsymbol{u_n \geq 5}$

*Initialisation* : On a $u_0 = 10$ donc $u_0 \geq 5$ donc la propriété est vraie au rang 0

*Hérédité* : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \geq 4$ et on cherche alors à démontrer que $u_{k+1} \geq 5$

Or $u_k \geq 5$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{5}u_k \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{5}u_k + 4 \geq 5$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \geq 5$ donc la propriété est vraie au rang k+1

*Conclusion* : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire donc pour tout entier n on a $u_n \geq 5$