n° 30 p 329 $A(1;0,5;2)$ $B(0;2;0,5)$ $C(3;2,5;7)$ $D(3;-2,5;1)$

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1,5\\-1,5\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{1,5} \neq \frac{5}{-1,5}$

donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1,5\\-1,5\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{-1} = \frac{-3}{1,5} \neq \frac{-1}{-1,5}$

donc les points A, B, D ne sont pas alignés donc $A \notin (BD)$

remarque : on aurait pu utiliser $\vec{BD}\begin{pmatrix}3\\-4,5\\0,5\end{pmatrix}$ au lieu de $\vec{AD}$

2) a) A, B, D, E sont coplanaires si il existe 2 réels α et β tels que

$$\vec{AE} = \alpha\,\vec{AB} + \beta\,\vec{AD}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\1,5\\-1,5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha + 2\beta \\ 0 = 1,5\alpha - 3\beta \\ 2 = -1,5\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ 0 = 1,5\times 2\beta - 3\beta \\ 2 = -1,5\times 2\beta - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ 0 = 3\beta - 3\beta \\ 2 = -3\beta - \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ 0 = 0 \\ 2 = -4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ 0 = 0 \\ -\frac{2}{4} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\times(-0,5) \\ 0 = 0 \\ -0,5 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ 0 = 0 \\ \beta = -0,5 \end{cases}$$

donc $\vec{AE} = -\vec{AB} - 0,5\,\vec{AD}$ ce qui prouve que les points A, B, D, E sont coplanaires

b) $F \in (ABD)$ si il existe 2 réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -\alpha + 2\beta \\ -2,5 = 1,5\alpha - 3\beta \\ -1 = -1,5\alpha - \beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 4 \\ -2,5 = 1,5(2\beta + 4) - 3\beta \\ -1 = -1,5(2\beta + 4) - \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 4 \\ -2,5 = 3\beta + 6 - 3\beta \\ -1 = -3\beta - 6 - \beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 4 \\ -2,5 = 6 \quad \text{impossible} \\ -1 = -4\beta - 6 \end{cases}$$

puisque l'une des équations conduit à $-2,5 = 6$ (ce qui est impossible)

alors il n'existe pas 2 réels α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}$

donc $F \notin (ABD)$