

N° 45 p 31 :

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$

$$1/ \text{ a. } u_1 = \frac{2}{5} \times u_0 + 3 = \frac{2}{5} \times 8 + 3 = \frac{31}{5} = 6,2$$

$$u_2 = \frac{2}{5} \times u_1 + 3 = \frac{2}{5} \times \frac{31}{5} + 3 = \frac{137}{25} = 5,48$$

$$u_3 = \frac{2}{5} \times u_2 + 3 = \frac{2}{5} \times \frac{137}{25} + 3 = \frac{649}{125} = 5,192$$

b. il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

2/ Démontrons par récurrence que pour tout entier n , $u_n \geq u_{n+1} \geq 5$

Initialisation : On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 6,2$ donc $u_0 \geq u_1 \geq 5$ donc **la propriété est vraie au rang $n = 0$**

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k \geq u_{k+1} \geq 5$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire, $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 5$

$$\text{Or si } u_k \geq u_{k+1} \geq 5$$

$$\text{alors } \frac{2}{5}u_k \geq \frac{2}{5}u_{k+1} \geq \frac{2}{5} \times 5$$

$$\text{d'où } \frac{2}{5}u_k + 3 \geq \frac{2}{5}u_{k+1} + 3 \geq 2 + 3$$

$$\text{ainsi } u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 5 \quad \text{donc l'hérédité est démontrée}$$

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire

donc pour tout entier n , on a $u_n \geq u_{n+1} \geq 5$

ce qui prouve que la suite est décroissante (et minorée par 5) donc la conjecture est vérifiée.

3/ On donne $v_n = u_n - 5$

$$\text{a/ } v_n = u_n - 5 \quad \text{donc } u_n = v_n + 5$$

$$\text{et } v_{n+1} = u_{n+1} - 5$$

$$= \frac{2}{5} u_n + 3 - 5$$

$$= \frac{2}{5} u_n - 2$$

$$= \frac{2}{5} (v_n + 5) - 2$$

$$= \frac{2}{5} v_n + 2 - 2$$

$$= \frac{2}{5} v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

b/ Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 5 = 8 - 5 = 3$

$$\text{alors } v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$4/ u_n = v_n + 5$$

$$\text{donc } u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$$

$$5/ u_{100} = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{100} + 5 \approx 5$$

N° 19 p 27

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

Montrons **par récurrence** que pour tout entier n , $u_n = \frac{n}{n+1}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ or $\frac{0}{0+1} = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k = \frac{k}{k+1}$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\begin{aligned} \text{or } u_{k+1} &= \frac{1}{2 - u_k} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} & \text{car } u_k &= \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{1}{\frac{2(k+1) - k}{k+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \quad \text{donc l'hérédité est démontrée} \end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire

donc pour tout entier n on a $u_n = \frac{n}{n+1}$