

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$$

$$1. \quad u_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt \text{ avec } f(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \text{ or } f = \frac{u'}{u} \text{ avec } u(t) = 1+e^t \text{ et } u'(t) = e^t$$

Et puisque $1+e^t > 0$ sur $[0;1]$, alors une primitive de f est $F = \ln(u)$ soit $F(t) = \ln(1+e^t)$

$$\text{Ainsi } u_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt = F(1) - F(0) = \ln(1+e^1) - \ln(1+e^0) = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$2. \quad u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^t} + \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$3. \quad u_0 + u_1 = 1 \text{ donc } u_0 = 1 - u_1 \text{ or } u_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \text{ donc } u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$4. \quad u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{nt+t}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{nt} \times e^t}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 e^{nt} dt \\ &= \left[\frac{e^{nt}}{n} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^n}{n} - \frac{e^0}{n} \\ &= \frac{e^n - 1}{n} \end{aligned}$$

$$5. \quad \text{D'après la formule précédente, } u_1 + u_2 = \frac{e^1 - 1}{1} = e - 1 \text{ donc } u_2 = e - 1 - u_1 \text{ or } u_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\text{donc } u_2 = e - 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

On a alors :

$$u_2 + u_3 = \frac{e^2 - 1}{2} \text{ donc } u_3 = \frac{e^2 - 1}{2} - u_2 \text{ or } u_2 = e - 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \text{ donc}$$

$$u_3 = \frac{e^2 - 1}{2} - \left(e - 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) = \frac{e^2 - 1}{2} - e + 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_3 + u_4 = \frac{e^3 - 1}{3} \text{ donc } u_4 = \frac{e^3 - 1}{3} - u_3 = \frac{e^3 - 1}{3} - \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + e - \frac{5}{6} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$6. \quad u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt - \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t} - e^{nt}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt+t} - e^{nt}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt} \times e^t - e^{nt}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t} dt \end{aligned}$$

$$7. \quad \text{Si } \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t} \text{ est positive sur } [0; 1] \text{ alors } \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t} dt \text{ est positive (positivité de l'intégrale)}$$

or sur $[0; 1]$, $e^{nt} > 0$ et $1 + e^t > 0$, il reste à déterminer le signe de $e^t - 1$

mais si $0 \leq t \leq 1$ alors $e^0 \leq e^t \leq e^1$ donc $1 \leq e^t \leq e$ et alors $0 \leq e^t - 1 \leq e - 1$ ainsi $e^t - 1 \geq 0$

il en résulte que $\frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t} \geq 0$ sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t} dt \geq 0$

ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.