n°76 p201

(A) $g(x) = x + 2 - x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

1) en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x+2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \text{ (croissances comparées)}\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} x+2-x\ln x = 2 \text{ (somme)}$$

en $+\infty$: $g(x) = x + 2 - x\ln x = x\left(1 + \frac{2}{x} - \ln x\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}-\ln x = -\infty \text{ (somme)}\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \text{ (produit)}$$

2) $x\ln x$ est de la forme uv avec $u(x) = x$, $v(x) = \ln x$

$u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où

$$g'(x) = 1 - \left(1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

or $g'(x) \geq 0$

$\iff -\ln x \geq 0$

$\iff \ln x \leq 0$

$\iff x \leq e^0$

$\iff x \leq 1$

d'où

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
$g(x)$	‖ 2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\left(g(1) = 1+2-1\ln 1 = 3\right)$

3) • Sur $]0\,;1]$, $g(x) > 2$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0\,;1]$

• Sur $[1\,;+\infty[$, g est défini, continue et strictement décroissante

or $\left.\begin{array}{l}g(1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\end{array}\right\}$ $0 \in\,]-\infty\,;3]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$

D'après le tableau de variation de g, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

(B) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2+x}$ sur $]0 ; +\infty[$

1). $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x$ $\quad v(x) = 2+x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

d'où $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(2+x) - 1\times \ln x}{(2+x)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}(2+x - x\ln x)}{(2+x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(2+x)^2}$

2) $g(\alpha) = 0 \iff \alpha + 2 - \alpha\ln\alpha = 0 \iff -\alpha\ln\alpha = -(\alpha+2) \iff \ln\alpha = \dfrac{\alpha+2}{\alpha}$

alors $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{2+\alpha} = \dfrac{\frac{\alpha+2}{\alpha}}{2+\alpha} = \dfrac{\alpha+2}{\alpha} \times \dfrac{1}{2+\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$

3) en 0 :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} 2+x = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (quotient)

en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\ln x}{2+x} = \dfrac{x \times \frac{\ln x}{x}}{x\left(\frac{2}{x}+1\right)} = \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{2}{x}+1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ (croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}+1 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (quotient)

4)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
x	$\|\|$		$+$		
$(2+x)^2$	$\|\|$		$+$		
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\alpha}$	$\searrow$	0

d'après (A) 3)

5) D'après la calculatrice,

$4{,}31 < \alpha < 4{,}32$