

$$u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1} dt$$

$$\begin{aligned} 1. \quad a. \quad u_{n+1} - u_n &= \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2+1} dt - \int_0^n t\sqrt{t^2+1} dt \\ &= \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2+1} dt + \int_n^0 t\sqrt{t^2+1} dt \\ &= \int_n^0 t\sqrt{t^2+1} dt + \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2+1} dt \\ &= \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1} dt \quad (\text{d'après la relation de Chasles}) \end{aligned}$$

b. n est un entier naturel donc si $t \in [n; n+1]$, alors $t \geq 0$ et $\sqrt{t^2+1} \geq 0$

ainsi sur $[n; n+1]$, $t\sqrt{t^2+1} \geq 0$ donc $\int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1} dt \geq 0$ (positivité de l'intégrale)

ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

$$2. \quad f(t) = (t^2+1)\sqrt{t^2+1}$$

$$a. \quad f = uv \quad \text{avec } u(t) = t^2+1 \quad \text{et } v(t) = \sqrt{t^2+1} \quad (\text{forme } \sqrt{u})$$

$$\text{donc } u'(t) = 2t \quad \text{et } v'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} \quad ((\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}})$$

alors

$$f'(t) = 2t\sqrt{t^2+1} + (t^2+1) \times \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = 2t\sqrt{t^2+1} + (\sqrt{t^2+1})^2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2t\sqrt{t^2+1} + t\sqrt{t^2+1} = 3t\sqrt{t^2+1}$$

b. On en déduit donc qu'une primitive de $3t\sqrt{t^2+1}$ est $(t^2+1)\sqrt{t^2+1}$

et donc qu'une primitive de $t\sqrt{t^2+1}$ est $\frac{1}{3}(t^2+1)\sqrt{t^2+1}$

$$\text{ainsi } u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1} dt = \left[\frac{1}{3}(t^2+1)\sqrt{t^2+1} \right]_0^n = \frac{1}{3}(n^2+1)\sqrt{n^2+1} - \frac{1}{3}(0^2+1)\sqrt{0^2+1}$$

$$\text{d'où } u_n = \frac{1}{3}(n^2+1)\sqrt{n^2+1} - \frac{1}{3}$$

c. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2+1 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

donc la suite (u_n) est divergente

$$3. \quad a. \quad \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \text{ est de la forme } \frac{u'}{\sqrt{u}} \quad (\text{de primitive } 2\sqrt{u}) \quad \text{avec } u(t) = t^2+1 \quad \text{donc } u'(t) = 2t$$

$$\text{or } \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{donc une primitive de } \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \text{ est } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{t^2+1} = \sqrt{t^2+1}$$

$$\text{b. } v_n = \int_0^n \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int_0^n t^2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad \text{on pose alors } u(t) = t^2 \quad \text{et } v'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\text{d'où } u'(t) = 2t \quad \text{et } v(t) = \sqrt{t^2+1} \quad (\text{d'après 3.a})$$

en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^n t^2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt &= \left[t^2 \times \sqrt{t^2+1} \right]_0^n - \int_0^n 2t\sqrt{t^2+1} dt \\ &= n^2\sqrt{n^2+1} - 0^2\sqrt{0^2+1} - 2 \int_0^n t\sqrt{t^2+1} dt \\ &= n^2\sqrt{n^2+1} - 2u_n \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } v_n = n^2\sqrt{n^2+1} - 2u_n$$

$$\text{or } u_n = \frac{1}{3}(n^2+1)\sqrt{n^2+1} - \frac{1}{3} \quad \text{donc } v_n = n^2\sqrt{n^2+1} - \frac{2}{3}(n^2+1)\sqrt{n^2+1} + \frac{2}{3}$$

$$\text{c. } \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} dt = v_1 = 1^2\sqrt{1^2+1} - \frac{2}{3}(1^2+1)\sqrt{1^2+1} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}$$