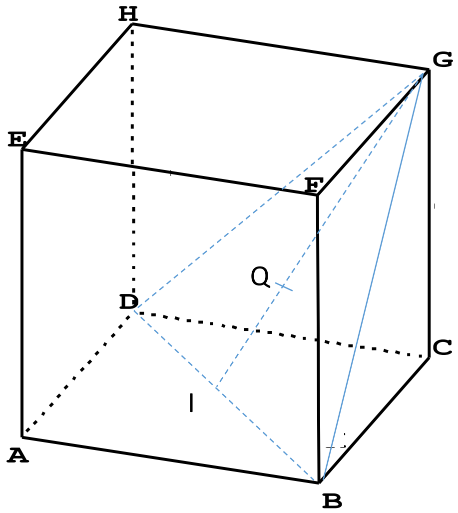
Exercice Bilan



ABCDEFGH est un cube et I est le milieu de [BD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$

1/ Donner les coordonnées du point I et calculer les coordonnés du point Q défini par $\overrightarrow{GQ} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{GI}$

Dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$), on a

A (0 ;0 ;0) B (1 ;0 ;0) C (1 ;1 ;0) D(0 ;1 ;0) E (0 ;0 ;1)

F (1 ;0 ;1) G (1 ;1 ;1) et H (0 ;1 ;1)

I est le milieu de [BD] donc **I (** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **;** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **; 0**)

$$\overrightarrow{GQ} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{GI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q-1 \\ y_Q-1 \\ z_Q-1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q - 1 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y_Q - 1 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ z_Q - 1 = \frac{2}{3} \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -\frac{1}{3} + 1 \\ y_F = -\frac{1}{3} + 1 \\ z_F = -\frac{2}{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{2}{3} \\ y_Q = \frac{2}{3} \\ z_Q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

donc les coordonnées du point **Q sont (** $\mathbf{\frac{2}{3}}$ **;** $\mathbf{\frac{2}{3}}$ **;** $\mathbf{\frac{1}{3}}$**).**

2/ a/ Démontrer que les droites (CQ) et (GI) sont orthogonales.

un vecteur directeur de la droite (CQ) est $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{2}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

un vecteur directeur de la droite (GI) est $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times (-1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0$

donc les droites **(CQ) et (GI) sont orthogonales.**

b/ Démontrer que la droite (CQ) est orthogonale au plan (GBD) et en déduire la distance du point C au plan (GBD)

avec $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{3} \times 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1\,) + \frac{1}{3} \times (-1) = 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ donc (CQ) et (GB) sont orthogonales.

avec $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{3} \times (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 0 + \frac{1}{3} \times (-1) = \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} = 0$ donc (CQ) et (GD) sont orthogonales.

On a donc la droite (CQ) qui est orthogonale aux 2 droites (GB) et (GD), sécantes en G dans le plan (GBD) ce qui prouve que la droite **(CQ) est orthogonale au plan (GBD).**

(CQ) est orthogonale au plan (GBD) et Q appartient au plan (GBD) donc Q est le projeté orthogonal de C sur le plan (GBD)

Ainsi, la distance du point C au plan (GBD) est $CQ = \|\overrightarrow{CQ}\| = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3/ Calculer de 2 manières différentes le volume de la pyramide CGBD

Le volume de la pyramide est $V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$ où A_{base} est l'aire de la base et h la hauteur correspondante

D'une part, en choisissant le triangle GBD comme base, la hauteur correspondante est alors CQ

et on a $A_{GBD} = \frac{BD \times GI}{2}$

or $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$

et $GI = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

ainsi $A_{GBD} = \frac{BD \times GI}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = CQ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d'où $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{18} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

D'autre part, en choisissant le triangle BCD comme base, la hauteur correspondante est alors CG

et on a $A_{BCD} = \frac{BC \times CD}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ et $h = CG = 1$

d'où $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \mathbf{\frac{1}{6}}$