Exercice 1 :

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = (0{,}04t^2 - 8t + 400)e^{0{,}02t} + 40 \quad \text{pour} \quad t \in [0\,;\,120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0; 120] et on note f' sa fonction dérivée. Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0; 120] on a :

$$f'(t) = (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)e^{0{,}02t}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0; 120], puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :
   a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
   b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

Exercice 2 :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 6x + 10$ et v la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$.

On note f la fonction définie par $f = v \circ u$

1) Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$.

2) Justifier que la fonction f est bien définie sur [0 ; 10]

3) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 10]

Exercice 3 :

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ..... :
    u = .....
    n = .....
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   d. Calculer u_{30} et interpréter le résultat.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x + 1,4}$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f
2. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000