Exercice 1

$$f\,(t) = (0{,}04t^2 - 8t\, + 400)e^{0{,}02t} + 40 \quad \text{pour} \quad t \in [0\,;\,120]$$

1. $f\,(0) = (0{,}04 \times 0^2 - 8 \times 0\, + 400)e^{0{,}02\times 0} + 40 = 440$ donc il y avait 440 crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. $f = u \times v + 40 \quad avec \qquad u(t) = 0{,}04t^2 - 8t + 400 \qquad v(t) = e^{0{,}02t}$

$$u'(t) = 0{,}08t - 8 \qquad v'(t) = 0{,}02e^{0{,}02t}$$

$or\ (uv)' = u'v + uv' \quad donc \qquad f'(t) = (0{,}08t - 8)e^{0{,}02t} + (0{,}04t^2 - 8t + 400) \times 0{,}02e^{0{,}02t}$

$$= 0{,}08te^{0{,}02t} - 8e^{0{,}02t} + 0{,}0008t^2e^{0{,}02t} - 0{,}16te^{0{,}02t} + 8e^{0{,}02t}$$

$$= 0{,}0008t^2e^{0{,}02t} - 0{,}08te^{0{,}02t}$$

Ainsi $f\,'(t) = (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)e^{0{,}02t}$

3. $0{,}0008t^2 - 0{,}08t$ est un trinôme dont les racines sont 0 et 100 et pour lequel $a = 0{,}0008 > 0$
Ainsi, on a :

t	0		100		120
$0{,}0008t^2 - 0{,}08t$	0	$-$	0	$+$	
$e^{0{,}02t}$		$+$		$+$	
$f\,'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	440	↘	40	↗	216,37

4. Selon cette modélisation :

- **a.** Le nombre de crapauds atteint son minimum au bout de J = 100 jours. Et le nombre minimum de crapauds est de 40.
- **b.** Après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds augmente constamment de 40 crapauds à environ 216, donc il dépassera un jour 140.
- **c.** D'après la calculatrice, le nombre de crapauds dépassera 140 individus au bout de 116 jours (car $f(115) \approx 130 \;\; et \;\; f(116) \approx 144$)

Exercice 2

1) $f(x) = (v \circ u)(x) = v\left(u(x)\right) = v(\,x^2 - 6x + 10) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

2) f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 6x + 10 \geq 0$
Or, pour $x^2 - 6x + 10, \quad on\ a\ \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = -4$
Donc le trinôme n'admet pas de racine et il est toujours du signe de $a = 1 > 0$
Ainsi, $x^2 - 6x + 10 \;>\; 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, alors elle est bien définie sur [0 ; 10]

3) $f = \sqrt{u}$ $avec\ u(x) = x^2 - 6x + 10$ $d'où\ u'(x) = 2x - 6$

Or $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

x	0		3		10
$x-3$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{x^2-6x+10}$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{10}$	↘	1	↗	$5\sqrt{2}$

Exercice 3

Partie A

1. **a.** D'une année à l'autre, le nombre de panneaux solaires diminue de 2 % donc il est multiplié par 0,98 puis on installe 250 nouveaux panneaux d'où $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$
   b. D'après la calculatrice, on a $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$ donc le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000 au bout de 68 ans (soit en 2 088)
   c.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. Montrons, **par récurrence**, que pour tout entier n, $u_n \leq 12\,500$

Initialisation : On a $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 12\,500$
et on cherche à démontrer alors que $u_{k+1} \leq 12\,500$

Or $u_k \leq 12\,500$
$\Leftrightarrow$ $0{,}98\,u_k \leq 12\,500 \times 0{,}98$
$\Leftrightarrow$ $0{,}98u_k + 250 \leq 12\,250 + 250$
$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 12\,500$ donc la propriété est vraie au rang k+1, l'hérédité est ainsi démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire, donc pour tout entier n, on a $u_n \leq 12\,500$

3. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}98u_n + 250 - u_n = -0{,}02u_n + 250$
or d'après la question précédente, $u_n \leq 12\,500$,
donc $-0{,}02u_n \geq -0{,}02 \times 12\,500$
c'est-à -dire $-0{,}02u_n \geq -250$
par conséquent, $-0{,}02u_n + 250 \geq 0$
donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante .

4. a. $v_n = u_n - 12\,500$ donc $u_n = v_n + 12\,500$

Si $v_n = u_n - 12\,500$ *alors* $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500$

$= 0{,}98u_n + 250 - 12\,500$

$= 0{,}98u_n - 12\,250$

$= 0{,}98(v_n + 12\,500) - 12\,250$ car $u_n = v_n + 12\,500$

$= 0{,}98v_n + 12\,250 - 12\,250$

$= 0{,}98v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98 et de 1er terme $v_0 = -1\,940$
alors $v_n = v_0 \times q^n = -1\,940 \times 0{,}98^n$

c. $u_n = v_n + 12\,500$ donc $u_n = -1\,940 \times 0{,}98^n + 12\,500$

d. $u_{30} = -1\,940 \times 0{,}98^{30} + 12\,500 \approx 11\,441{,}76$ ce qui signifie que la centrale Big Sun possèdera 11 442 panneaux solaires dans 30 ans, c'est-à-dire en 2 050.

Partie B $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0{,}02x + 1{,}4}$

1. $e^{-0{,}02x + 1{,}4}$ *est de la forme* e^u avec $u(x) = -0{,}02x + 1{,}4$ d'où $u'(x) = -0{,}02$
ainsi la dérivée de $e^{-0{,}02x + 1{,}4}$ *est* $-0{,}02e^{-0{,}02x + 1{,}4}$

donc $f'(x) = -500 \times (-0{,}02\, e^{-0{,}02x + 1{,}4})$
donc $f'(x) = 10\, e^{-0{,}02x + 1{,}4}$.

$10 > 0$ et $e^{-0{,}02x + 1{,}4} > 0$ donc $10\, e^{-0{,}02x + 1{,}4} > 0$ donc $f'(x) > 0$.
$f' > 0$ sur $[0 ; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f(x) > 12\,000$

$\Leftrightarrow 12500 - 500e^{-0{,}02x+1{,}4} > 12\,000$

$\Leftrightarrow -500e^{-0{,}02x+1{,}4} > 12\,000 - 12500$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < \frac{-500}{-500}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < 1$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < e^0$ (car $e^0 = 1$)

$\Leftrightarrow -0{,}02x + 1{,}4 < 0$

$\Leftrightarrow -0{,}02x < -1{,}4$

$\Leftrightarrow x > \frac{-1{,}4}{-0{,}02}$

$\Leftrightarrow x > 70$ donc le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000 dans plus de 70 ans.