(Ex 1) Partie A

1) a/ $f(0) = -4$

b/ $f'(0) = -1$

c/ $T : y = -x - 4$

2) La courbe $\mathcal{C}$ semble admettre une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $x = 2$

Partie B $f(x) = (x-4)e^{0,5x}$

1) a) $f = uv$ avec $u(x) = x - 4$ $\quad$ $v(x) = e^{0,5x}$ $\quad$ (forme $(e^u)' = u'e^u$)

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v'(x) = 0,5e^{0,5x}$

or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(x) = 1 \times e^{0,5x} + (x-4) \times 0,5e^{0,5x}$

$= e^{0,5x}(1 + (x-4)\times 0,5)$

$= e^{0,5x}(1 + 0,5x - 2)$

$= e^{0,5x}(0,5x - 1)$

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{0,5x}$			$+$		
$0,5x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	

$a = 0,5 > 0$

$0,5x - 1 = 0$

$\iff 0,5x = 1$

$\iff x = \frac{1}{0,5}$

$\iff x = 2$

$f(2) = (2-4)e^{0,5\times 2} = -2e^1 = -2e$

3) a) $T' : y = f'(4)(x-4) + f(4)$ avec $f(x) = (x-4)e^{0,5x}$ donc $f(4) = (4-4)e^{0,5\times 4} = 0$

et $f'(x) = e^{0,5x}(0,5x - 1)$ donc $f'(4) = e^{0,5\times 4}(0,5\times 4 - 1)$

$= e^2 \times 1 = e^2$

ainsi $T' : y = e^2(x-4) + 0$ soit $T' : y = e^2 x - 4e^2$

Ex2 $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$ et $u_0 = 8$

1) $v_n = u_n - 12$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$= 0,85u_n + 1,8 - 12$

$= 0,85u_n - 10,2$

$= 0,85(v_n + 12) - 10,2$ car $v_n = u_n - 12$ donc $u_n = v_n + 12$

$= 0,85v_n + 0,85 \times 12 - 10,2$

$= 0,85v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$

b) alors $v_n = v_0 \times q^n$ d'où $v_n = -4 \times 0,85^n$

c) on sait que $u_n = v_n + 12$ donc $u_n = -4 \times 0,85^n + 12$

d) $u_{n+1} - u_n = -4 \times 0,85^{n+1} + 12 - (-4 \times 0,85^n + 12)$

$= -4 \times 0,85^n \times 0,85 \cancel{+12} + 4 \times 0,85^n \cancel{-12}$

$= 0,85^n(-4 \times 0,85 + 4)$

$= 0,85^n \times 0,6$ or $0,85^n \times 0,6 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc la suite (u_n) est croissante

e) $u_n - 12 = -4 \times 0,85^n + 12 - 12 = -4 \times 0,85^n \leq 0$ donc $u_n - 12 \leq 0$

$\iff u_n \leq 12$

donc (u_n) est majorée par 12

2) a) D'une année à l'autre, le nombre d'abonnés diminuent de 15% donc il est multiplié par 0,85 $\left(1-\frac{15}{100}\right)$ et il y a 1800 (soit 1,8 milliers) nouveaux abonnés ainsi $u_{n+1}=0,85u_n+1,8$, et puisqu'en 2018, il y avait 8000 abonnés alors $u_0=8$

b) $2024=2018+6$ or $u_6=-4\times0,85^6+12\approx10,491$ donc on peut estimer que le nombre d'abonnés en 2024 sera d'environ 10 491

c) (u_n) majorée par 12 signifie que le nombre d'abonnés ne dépassera jamais 12000

Ex 3

1). $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$ avec $M(x; f(x) = \sqrt{x})$ et $A(1;0)$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x}$

$= \sqrt{x^2 - x + 1}$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

a) $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$

$u'(x) = 2x - 1$

or $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $g'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$a = 2 > 0$
$2\sqrt{x^2-x+1}$			$+$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

$2x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$g(0) = \sqrt{0^2 - 0 + 1} = 1$

$g(\frac{1}{2}) = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ainsi g est décroissante sur $[0; \frac{1}{2}]$ et g est croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$

b) puisque $AM = g(x)$, alors la distance AM est minimale pour $x = \frac{1}{2}$

et cette distance minimale vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$