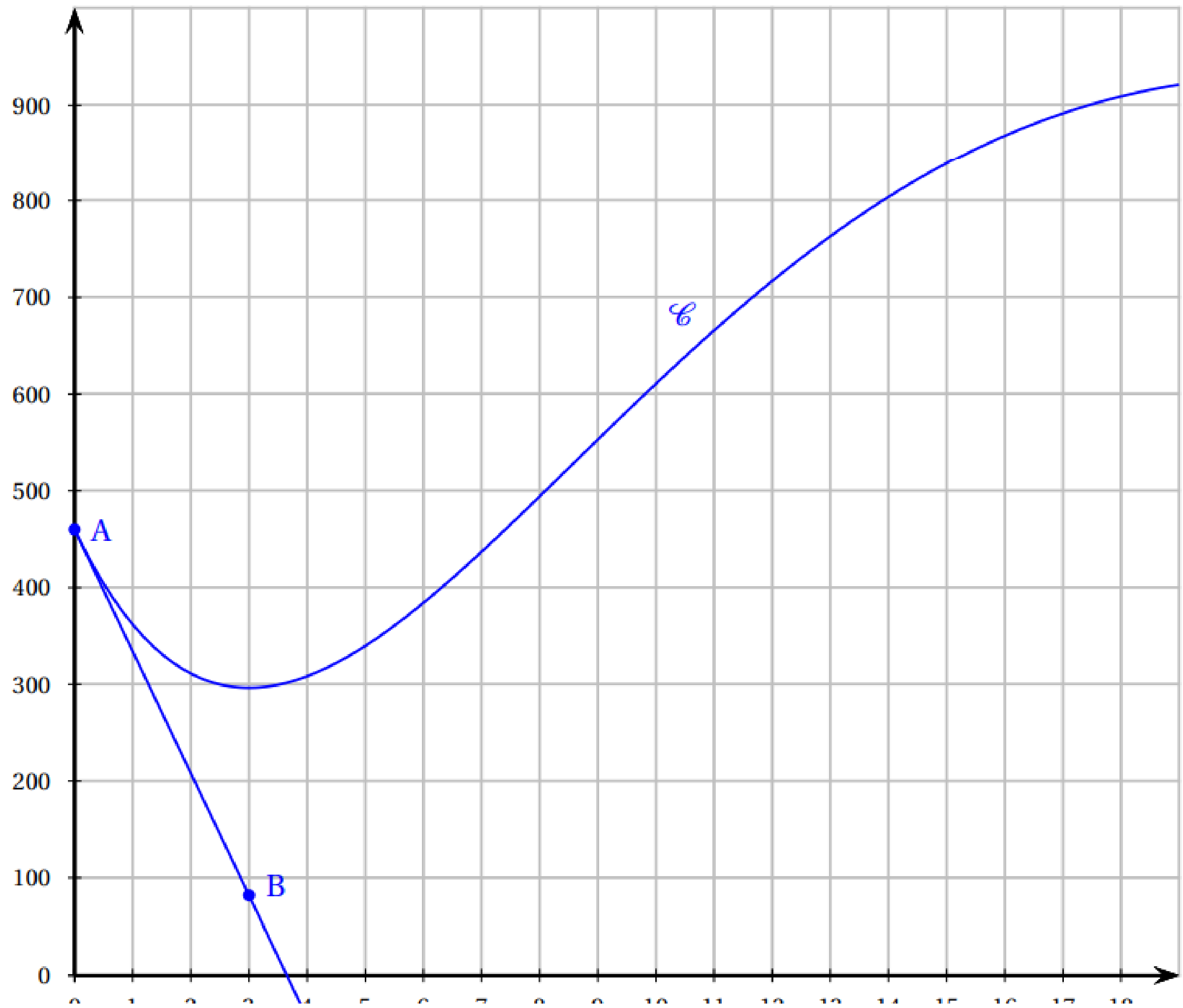
Terminales

MATHEMATIQUES : POUR SE PREPARER AU DS 1

EXERCICE 1 : points

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1^{er} janvier 2000 (année numéro 0) et le 1^{er} janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1^{er} janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1^{er} janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A $(0; 460)$ et B $(3; \ 82)$, est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathscr{C})$?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 29]$ par :

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 29]$.
   a. Démontrer que f' est définie par :
   $$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\,\mathrm{e}^{-0,1x}.$$
   b. On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	**Résultat :**
Solve$(-2x^2 + 48x - 126 = 0)$	3 et 21

   Retrouver ce résultat par le calcul.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0; 29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.
   d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

EXERCICE 2 : points

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018 + n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

1. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$.
   b. Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2020.
2. Laurence veut savoir à partir de quelle année la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare. Pour cela on utilise l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ...
        N ← N + 1
        U ← ...
Fin Tant que
```

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée.

b. Quelle est la valeur de N en sortie d'algorithme ?

3. On définit la suite (v_n) en posant $v_n = u_n - 550$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis démonter que :

$$u_n = 550 - 250 \times 0{,}96^n.$$

c. Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025.

4. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n < u_{n+1} < 550$

b. Que peut-on en déduire pour le nombre pommiers par hectare ?

EXERCICE 3 : points

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

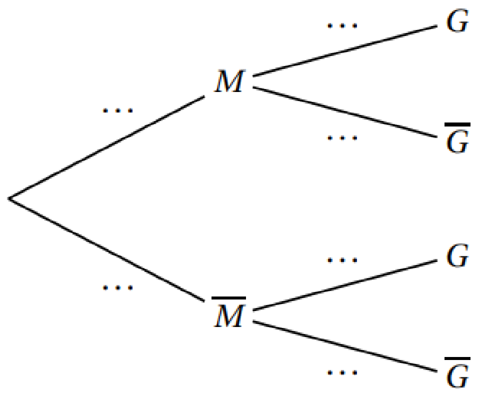
Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.
Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0{,}06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}2$, où $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



c. Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

d. Montrer que $p(G) = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

a. Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de T.

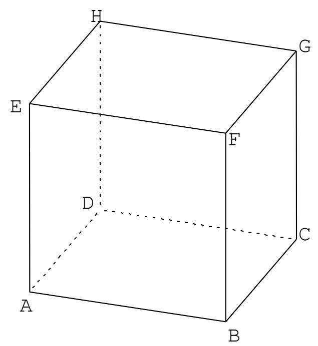
c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.

Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros.

Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

EXERCICE 4 : points



Soit ABCDEFGH un cube.

Le point K est le milieu de [HF] et L est le point tel que $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CE}$.

1. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Donner, sans justifier, les coordonnées des sommets du cube.
3. Déterminer les coordonnées du point K
   et montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.
4. Démontrer que les points A, F, H et L sont coplanaires.
5. Démontrer que les points A, L et K sont alignés.