TSpé Maths — **Pour se préparer au DS 1 : corrigé**

Exercice 1 :

Partie A

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.
2. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.
3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :
$f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{82-460}{3-0} = \dfrac{-378}{3} = -126.$

Partie B

1. 2014 correpond à $x = 14$ or $f(14) = (20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460)e^{-0,1\times 14} \approx 803,906$ soit 804 000 téléspectateurs

2.a. $f = u \times v$ avec $u(x) = 20x^2 - 80x + 460$ et $v(x) = e^{-0,1x}$
$u'(x) = 40x - 80$ $v'(x) = -0,1e^{-0.1x}$

Or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où
$$\begin{aligned} f'(x) &= (40x-80)e^{-0.1x} + (20x^2-80x+460)\times(-0,1e^{-0,1x}) \\ &= e^{-0,1x}(40x - 80 + (20x^2-80x+460)\times(-0,1)) \\ &= e^{-0,1x}(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46) \\ &= e^{-0,1x}(-2x^2 + 48x - 126) \end{aligned}$$

b. $-2x^2 + 48x - 126 = 0$

$\Delta = 48^2 - 4 \times (-2) \times (-126) = 1296 > 0$ donc l'équation admet 2 solutions

$x_1 = \frac{-48-\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 21$ et $x_2 = \frac{-48+\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 3$

c.

x	0		3		21		29
$e^{-0,1x}$				$+$			
$-2x^2 + 48x - 126$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	460	↘	296	↗	931	↘	823

d. Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.

Exercice 2 :

1. a. Soit u_n le nombre de pommier par hectare l'année n ; l'année suivante supprimer 4 % revient à multiplier u_n par $1 - \frac{4}{100} = 1 - 0,04 = 0,96$.
Il restera donc $0,96 \times u_n$ et en plantant 22 pommiers il y aura donc l'année $n+1$:

$$u_{n+1} = 0,96u_n + 22.$$

b. • En 2019, $n = 1$, donc $u_1 = 0,96u_0 + 2 = 0,96 \times 300 + 22 = 288 + 22 = 310$;
• En 2020, $n = 2$, donc $u_2 = 0,96u_1 + 22 = 0,96 \times 310 + 22 = 297,6 + 22 = 319,6$ soit 320 pommiers à l'unité près.

2.

a.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ⩽ 400
        N ← N + 1
        U ← 0,96 × U + 22
Fin Tant que
```

b. On peut programmer l'algorithme et faire afficher la valeur de N.
Sur une calculatrice en entrant 300, puis $*0,96 + 22$, il faut appuyer 13 fois sur la touche Entrée pour obtenir plus de 400 : $u_{12} \approx 396,8$ et $u_{13} \approx 402$, donc $N = 13$.

3. On donne $v_n = u_n - 550$ donc $u_n = v_n + 550$

a. Si $v_n = u_n - 550$ *alors*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 550 \\ &= 0,96u_n + 22 - 550 \\ &= 0,96u_n - 528 \\ &= 0,96(v_n + 550) - 528 \quad \text{car } u_n = v_n + 550 \\ &= 0,96v_n + 528 - 528 \\ &= 0,96v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,96 et de 1[er] terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,96 et de 1[er] terme $v_0 = -250$

alors $v_n = v_0 \times q^n = -250 \times 0,96^n$ or $u_n = v_n + 550$ donc $u_n = -250 \times 0,96^n + 550$

c. Pour estimer le nombre de pommiers de l'exploitation en 2025, il faut calculer u_7
or $u_7 = -250 \times 0,96^7 + 550 \approx 362$ mais u_7 représente le nombre de pommiers **par hectare.**
Ainsi, puisque l'exploitation de Laurence comporte 14 hectares, le nombre total de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025 est de $14 \times 362 = 5068$ soit 5068 pommiers

4. a. Il faut montrer que pour tout entier n, $u_n < u_{n+1} < 550$

Initialisation : On a $u_0 = 300$ et $u_1 = 0,96 \times 300 + 22 = 310$ donc $u_0 < u_1 < 550$
donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k < u_{k+1} < 550$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $u_{k+1} < u_{k+2} < 550$

or $u_k < u_{k+1} < 550$

$\Leftrightarrow$ $0,96u_k < 0,96u_{k+1} < 528$

$\Leftrightarrow$ $0,96u_k + 22 < 0,96u_{k+1} + 22 < 550$ (or $u_{k+1} = 0,96u_k + 22$ et $u_{k+2} = 0,96u_{k+1} + 22$)

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} < u_{k+2} < 550$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc pour tout entier n, on a

$$u_n < u_{n+1} < 550$$

b. On a donc, pour tout entier n , $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante

et pour tout entier $n, u_n < 550$ donc la suite est majorée par 550,

ce qui signifie qu'à long terme, le nombre de pommiers par hectare va augmenter constamment sans jamais dépasser 550 pommiers par hectare.

Exercice 4 :

1. Les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires donc (A; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$) est un repère de l'espace.

2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :
 A (0 ; 0 ; 0) B (1 ; 0 ; 0) C (1 ; 1 ; 0) D (0 ; 1 ; 0) E (0 ; 0 ; 1) F (1 ; 0 ; 1)
 G (1 ; 1 ; 1) et H (0 ; 1 ; 1)

3. K est le milieu de [HF] donc K $\left(\frac{x_H+x_F}{2} ; \frac{y_H+y_F}{2} ; \frac{z_H+z_F}{2}\right)$ soit K $\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{1+1}{2}\right)$
 donc K $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

$$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L-1 \\ z_L-0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L-1 \\ z_P \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L - 1 = -\frac{2}{3} \\ y_L - 1 = -\frac{2}{3} \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ y_L = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases}$$

 donc les coordonnées du point L sont $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

4. Les points A, F, H et L sont coplanaires si il existe 2 réels α et β tels que

 $\overrightarrow{AL} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AH}$ et en appliquant cette relation aux coordonnées des vecteurs, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-0 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = 1\alpha + 0\beta \\ \frac{1}{3} = 0\alpha + 1\beta \\ \frac{2}{3} = 1\alpha + 1\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha \\ \frac{1}{3} = \beta \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha \\ \frac{1}{3} = \beta \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha \\ \frac{1}{3} = \beta \\ \frac{1}{3} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$ on a donc $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$

 Ainsi $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$ ce qui prouve que les points A, F, H et L sont coplanaires

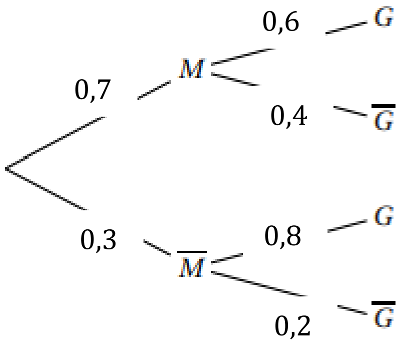
5. Les vecteurs $\overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$ donc $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

 donc les points A, L et K sont alignés.

Exercice 3 : D'après l'énoncé, $p(M) = 0{,}7$ $\quad p_M(G) = 0{,}6$ $\quad$ et $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0{,}06$

1. a. $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \frac{p(\overline{M}\cap\overline{G})}{p(\overline{M})} = \frac{0{,}06}{1-p(M)} = \frac{0{,}06}{1-0{,}7} = \frac{0{,}06}{0{,}3} = 0{,}2$

b.



c. $p(G \cap \overline{M}) = p(\overline{M} \cap G) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(G) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$
donc la probabilité que le client visite la grotte et ne visite pas le musée est de 0,24

d. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(G) = p(M \cap G) + p(\overline{M} \cap G) = p(M) \times p_M(G) + 0{,}24 = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}66$$

2. on a $p_G(M) = \frac{p(M\cap G)}{p(G)} = \frac{0{,}42}{0{,}66} = \frac{7}{11} \approx 0{,}64 > 0{,}5$
donc parmi les clients qui visitent la grotte , environ 64 % visitent aussi le musée, soit plus de la moitié.
L'affirmation est exacte.

3. a. T prend les valeurs 0 ; 5 ; 12 et 17 et la loi de probabilité de T est :

T	0	5	12	17
P(T)	0,06	0,24	0,28	0,42

$p(T = 0) = p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$
$p(T = 5) = p(\overline{M} \cap G) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$
$p(T = 12) = p(M \cap \overline{G}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$
$p(T = 17) = p(M \cap G) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$

b. L'espérance mathématique de T est $E(T) = 0 \times 0{,}06 + 5 \times 0{,}24 + 12 \times 0{,}28 + 17 \times 0{,}42 = 11{,}7$

c. on sait que E (T) = 11,7 ce qui signifie que sur un grand nombre de clients, en moyenne, un client dépense 11,7 € pour ses visites.

Ainsi, pour que le montant moyen des recettes soit supérieur à 700 € par jour, il faut que le nombre moyen x de clients par jour soit tel que : $\quad 11{,}7x \geq 700$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{700}{11{,}7} \qquad \text{or} \quad \frac{700}{11{,}7} \approx 59{,}8$$

donc le nombre moyen de clients par jour permettant d'atteindre cet objectif doit être d'au moins 60 .