

Exercice 1

1. b ✓

2. c ✓

3. c ✓

4. d ✓

Exercice 2

1. $U_0 = -10\,000$

$$U_1 = 0,95U_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,700$$
 ✓

$$U_2 = 0,95U_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,415$$
 ✓

(0,5)

2. a. On cherche à démontrer que pour tout entier naturel n ,
 $U_n > 4000$ Initialisation : pour $n = 0$, $U_n = -10\,000$ ✓ainsi, $U_0 > 4000$ ✓

donc, la propriété est initialisée ✓

Hérédité : on admet qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $U_k > 4000$
et on démontre que la propriété est vraie au rang $k+1$ Si $U_k > 4000$ ✓alors $0,95U_k > 3800$ ✓alors $0,95U_k + 200 > 4000$ ✓alors $U_{k+1} > 4000$ ✓

ainsi, l'hérédité est prouvée ✓

N°

Conclusion : la propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 4000$$

b. La suite (u_n) est décroissante

De plus, elle est minorée par 4000 car

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4000$$

Donc, d'après le théorème de convergence, la suite (u_n) converge

$$3. a. v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$$

$$\begin{aligned} b. \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 4000 \\ &= 0,95 u_n + 200 - 4000 \\ &= 0,95 u_n - 3800 \\ &= 0,95 (u_n - 4000) \\ &= 0,95 v_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0,95$ et de 1^{er} terme $v_0 = 6000$

$$c. \text{ On a donc, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6000 \times 0,95^n$$

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 4000$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= v_n + 4000 \\ &= 4000 + 6000 \times 0,95^n \end{aligned}$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0 \text{ car } -1 < 0,95 < 1$$

$$\text{On a donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 6000 \times 0,95^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Donc, la limite de la suite (u_n) est 0.

4. Chaque année, la population de l'espèce animale baisse de 5% donc elle est multipliée par 0,95 ($1 - 0,05$) et 200 individus sont réintroduits à la fin de chaque année donc on ajoute 200 au nombre d'individus.

De plus, le nombre d'individus en 2020 est de 10 000.

Donc, l'évolution de cette population peut être modélisée par la suite (u_n) telle que $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 4000 > 0$$

Donc, la population n'atteindra jamais 0 donc l'espèce ne s'éteindra pas.

$$u_{35} = 4000 + 6000 \times 0,95^{35} \approx 4326,5 < 5000$$

Donc, plus de la moitié de la population (5000) disparaît.

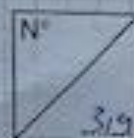
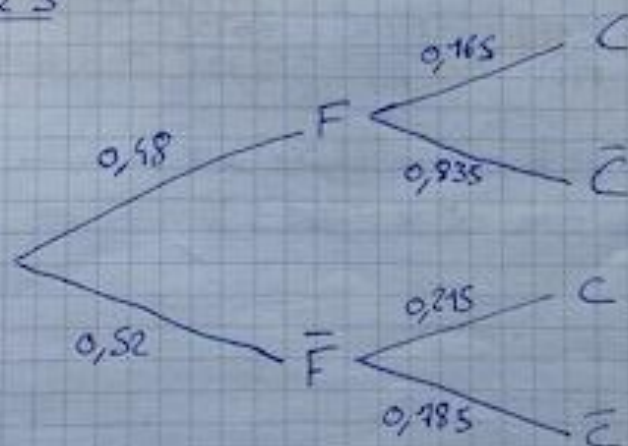
Ainsi, cette affirmation est vraie.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4000 + 6000 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n \right) \\ &= 4000 < 5000 \end{aligned}$$

donc, la population va tendre vers 4000 au cours du temps.

Exercice 3

1.



2. La probabilité que la personne choisie ~~soit~~ une femme qui exerce une profession de cadre est

$$P(F \cap C) = P(F) \times P_F(C) = 0,48 \times 0,165 = 0,0792$$

ne rien
écrire
dans

la
partie
barée

3. a. Les événements F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers Ω

car :

- $F \cup \bar{F} = \Omega$

- $F \cap \bar{F} = \emptyset$

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(F \cap C) + P(\bar{F} \cap C) \\ &= P(F) \times P_F(C) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(C) \\ &= 0,48 \times 0,165 + 0,52 \times 0,215 \\ &= 0,191 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191

b. $P(F \cap C) = 0,0792$

$$P(F) \times P(C) = 0,09168$$

Ainsi, $P(F \cap C) \neq P(F) \times P(C)$

Donc, les événements F et C ne sont pas indépendants.

$$4. P_C(F) = \frac{P(C \cap F)}{P(C)} = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,0792}{0,191} \approx 0,4157$$

La probabilité que la personne choisie soit une femme sachant que c'est un cadre est de 41,5%

5. a. On répète 15 fois de manière indépendante et identique une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès S : "la personne choisie est un cadre" est $p = 0,191$.
Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(15; 0,191)$

b. La probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre est: $P(X \leq 1) \approx 0,195$

c. $E(X) = np = 15 \times 0,191 = 2,865$

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 2,865

6. On répète n fois de manière indépendante et identique une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès S : "la personne choisie est un cadre" est $p = 0,191$.

Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(n; 0,191)$

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0,191^0 \times 0,809^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,809^n \leq 0,01$$

N°

$$0,809^{21} \approx 0,0117 > 0,01$$

$$0,809^{22} \approx 0,0089 \leq 0,01$$

Donc, la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un adre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$ est 22 .

Exercice 4

Partie A

1 $\forall x \in [0; 12], f(x) = 2xe^{-x}$

ainsi, $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$

$$u'(x) = 2, \quad v'(x) = -e^{-x}$$

$$f' = u'v + uv'$$

$$\text{ainsi, } f'(x) = 2e^{-x} + 2x \times (-e^{-x})$$

$$= -2xe^{-x} + 2e^{-x}$$

Donc le résultat de la ligne 1 est correct.

2 a $f'(x) = -2xe^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}(1-x)$

Soit $x \in [0; 12], 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	12	
e^{-x}		+		/
2		+		/
$1-x$	+	0	-	car $-1 < 0$
$f'(x)$	+	0	-	/
$f(x)$	0	$\nearrow 2e^{-1}$	$\searrow 24e^{-12}$	(0,75)

$$f(0) = 2 \times 0 \times e^0 = 0$$

$$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0,7358$$

$$f(12) = 2 \times 12 \times e^{-12} = 24e^{-12} \approx 0,0001475$$

b. Sur $[0; 1]$, la fonction f est définie, continue et strictement croissante.

Or, 0,5 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$.

Sur $[1; 12]$, la fonction f est définie, continue et strictement décroissante.

Or, 0,5 est compris entre $f(1)$ et $f(12)$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution β sur $[1; 12]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0,5$ admet uniquement deux solutions α et β sur l'intervalle $[0; 12]$.

D'après la calculatrice, $\alpha \approx 0,36$
 $\beta \approx 2,15$

3. D'après le logiciel, $\forall x \in [0; 12]$
 $f''(x) = 2(x-2)e^{-x}$

ou $f'(x) = (2-x)e^{-x}$
 $f''(x) = -2e^{-x} + (2-x)e^{-x}$
 $= e^{-x}(-2 + 2 - x)$
 $= e^{-x} \times (-x)$
 ne rien écrire dans

Soit $x \in [0; 12]$, $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0	2	12	
2		+		
$x-2$	-	0	+	car $-1 > 0$
e^{-x}		+		
$f''(x)$	-	0	+	

$f''(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[0; 2]$

donc, la fonction f est concave sur l'intervalle $[0; 2]$

$f''(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[2; 12]$

donc, la fonction f est convexe sur l'intervalle $[2; 12]$

$f''(x)$ s'annule et change de signe pour $x = 2$

donc, la courbe représentative de la fonction f Γ_f admet un point d'inflexion d'abscisse $x = 2$.

Partie B

1. a. Le taux d'alcoolémie de cette personne augmente avec une augmentation relative pendant la première heure passant de 0 g/L à 0,75 g/L puis, il diminue avec une diminution accélérée de une à deux heures puis avec une diminution relative de deux heures à 12 heures après la consommation d'alcool passant sur toute la diminution de 0,75 g/L à environ 0 g/L.

b. Le taux d'alcoolémie de cette personne est minimal après une heure. Sa valeur est alors d'environ 0,75 g/L

2. $f(x) = 0,5$ pour $x = \alpha \approx 0,36$ ou $x = \beta \approx 2,15$

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$

Donc $f(x) \leq 0,5$ pour $x \in [0; \alpha]$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 12]$

Donc $f(x) \leq 0,5$ pour $x \in [\beta; 12]$

Ainsi, le taux d'alcoolémie de l'automobiliste est en dessous de la législation pendant les 22 premières minutes suivant sa consommation d'alcool et il reprend une valeur conforme à la législation au bout de 2,15 heures soit 2h et 9 min. environ