BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°1

MATHÉMATIQUES

Mardi 14 janvier 2025

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points

$$A\,(1\,;\,0\,;\,-1) \qquad B\,(1\,;\,2\,;\,3) \qquad C\,(-5\,;\,5\,;\,0) \quad \text{et} \quad D\,(13\,;\,-4\,;\,9)$$

1. Les points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec :

a) $\alpha = 2$ et $\beta = -3$ b) $\alpha = 3$ et $\beta = -2$ c) $\alpha = -3$ et $\beta = -2$ d) $\alpha = -2$ et $\beta = 3$

2. Les droites (AC) et (BD) sont :

a) orthogonales b) strictement parallèles c) sécantes d) non coplanaires

3. Une valeur approchée au degré près d'une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est :

a) 90 ° b) 39 ° c) 66 ° d) 45 °

4. Un vecteur normal au plan (ABC) est :

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$ c) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ d) $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}$

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 200$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$.

2. **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0{,}95^n$$

d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (6 points)

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. **a.** Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.

   b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
6. Soit n un entier naturel.
   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.
   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 4 (5 points)

f est la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. a. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ en le justifiant.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans $[0\,;\,12]$.
   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
   b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?
   Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?