Exercice 1

Affirmation 1

D appartient au plan (ABC) si il existe 2 réels α et β tels que :

$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

or $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}2 = \alpha + 0\beta\\ 2 = 4\alpha + 2\beta\\ 2 = -2\alpha - 2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\\ 2 = 8 + 2\beta\\ 2 = -4 - 2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\\ -3 = \beta\\ -3 = \beta\end{cases}$

Donc $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$

Donc l'affirmation 1 est vraie.

(1)

Affirmation 2

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

or $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = 1\times2 + 4\times0 + (-2)\times4 = 2 - 8 = -6 \neq 0$

Donc (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

L'affirmation 2 est fausse.

(1)

Affirmation 3

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

or $\sqrt{21} \neq \sqrt{8} \neq \sqrt{5}$ donc $AB \neq AC \neq BC$

Donc le triangle ABC n'est pas isocèle.

L'affirmation 3 est fausse.

(1)

Affirmation 4

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = xx' + yy' + zz' = -2\times0 + 1\times2 + 1\times(-2) = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = -2\times1 + 1\times4 + 1\times(-2) = 0$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

L'affirmation 4 est vraie.

(1)

Exercice 2 :

Partie A :

1. Par lecture graphique,

f est croissante sur $]-\infty ; 0,4]$ car $f' > 0$ sur $]-\infty ; 0,4]$

f est décroissante sur $[0,4 ; 2,6]$ car $f' < 0$ sur $[0,4 ; 2,6]$ (0,5)

f est croissante sur $[2,6 ; +\infty[$ car $f' > 0$ sur $[2,6 ; +\infty[$

2. Par lecture graphique,

f semble être concave sur $]-\infty ; -1]$ car f' est croissante sur $]-\infty ; -1]$ (0,5)

et f semble être convexe sur $[2 ; +\infty[$ car f' est croissante sur $[2 ; +\infty[$

Partie B :

1. f est sous la forme $f = u \times v$ avec

$u(x) = x^2 - 5x + 6$ $\quad v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x - 5$ $\quad v'(x) = e^x$

or $(u \times v)' = u'v + v'u$

donc $f'(x) = (2x - 5)e^x + e^x(x^2 - 5x + 6)$

$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6 + 2x - 5)$

$\underline{f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x}$ (0,5)

3. On cherche un réel x tel que $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)e^x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$ ou $e^x = 0$ (impossible)

$x^2 - 3x + 1$ est un trinôme avec $a \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 9 - 4$

$\Delta = 5 > 0$ donc il y a 2 racines réelles

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_1 \approx 0{,}38$ $x_2 \approx 2{,}62$

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2-3x+1	$+$	0	$-$	0	$+$
e^x			$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	[illegible] $\approx$ [illegible]	↘	[illegible] $\approx$ [illegible]	↗

$x > 0$

f est croissante sur $]-\infty ; \frac{3-\sqrt{5}}{2}]$ car $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; \frac{3-\sqrt{5}}{2}]$

f est décroissante sur $[\frac{3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ car $f'(x) < 0$ sur $[\frac{3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

f est croissante sur $[\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty[$ car $f'(x) > 0$ sur $[\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty[$

4. L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0 est

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$y = 1 \times x + 6$

$y = x + 6$

5. a. Établissons le tableau de signes de f''

On cherche un réel x tel que $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)e^x = 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $x-2 = 0$ ou $e^x = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ ou impossible.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$			$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0		$+$	
e^x			$+$		
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

($x-2$ est croissant)

($x+1$ est croissant)

ne rien écrire dans

la parti

barr

1

f est convexe sur $]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$ car

$f''(x) > 0$ pour $x \in]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$

f est concave sur $[-1 ; 2]$ car $f''(x) < 0$ pour $x \in [-1 ; 2]$

6. Sur $[-1 ; 2]$, f est concave, donc la courbe représentative de la fonction f se situe en dessous de ses tangentes.

Or l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0 est $y = x+6$,

1

donc pour tout $x \in [-1 ; 2]$, $f(x) \leq x + 6$

Exercice 3.

1. $u_2 = 0,9u_1 + 1,3 = 0,9\times 3 + 1,3 = 4$

$u_3 = 0,9u_2 + 1,3 = 0,9\times 4 + 1,3 = 4,9$

0,5

Au deuxième mois, 400 questions sont présentes sur la FAQ.

Au troisième mois, 490 questions sont présentes sur la FAQ.

2. On cherche à démontrer par récurrence que $u_n = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^n$ avec $n \geq 1$

Initialisation

Pour $n = 1$, on a $13 - \frac{100}{9}\times 0,9^1 = 13 - \frac{90}{9} = 13 - 10 = 3 = u_1$!

donc la propriété est vraie pour $n = 1$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité

On suppose qu'il existe un rang $k \geq 1$ tel que $u_k = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^k$, et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^{k+1}$.

or $u_k = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^k$

$\Leftrightarrow 0,9u_k = 0,9\left(13 - \frac{100}{9}\times 0,9^k\right)$

$\Leftrightarrow 0,9u_k = 11,7 - \frac{100}{9}\times 0,9^{k+1}$

$\Leftrightarrow 0,9u_k + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9}\times 0,9^{k+1} + 1,3$

$\Leftrightarrow u_{k+1} = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^{k+1}$

donc l'hérédité est démontrée

N°

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire

donc pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $u_n = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^n$

3. $u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^{n+1} - \left(13 - \frac{100}{9}\times 0,9^n\right)$

$u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9}\times 0,9^{n+1} - 13 + \frac{100}{9}\times 0,9^n$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1} + \frac{100}{9}\times 0,9^n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9}\left(0,9^n - 0,9^{n+1}\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9}\left(0,9^n - 0,9^n\times 0,9\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9}\left(0,9^n(1 - 0,9)\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9}\times 0,1\times 0,9^n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{10}{9}\times 0,9^n$

or $\frac{10}{9} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{10}{9}\times 0,9^n > 0$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

4. Cette fonction détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 8,5$

$u_8 \simeq 8,22$ $\quad u_9 \simeq 8,70$

donc la valeur renvoyée par la saisie de seuil $(8,5)$,

est 9. Le nombre de questions présentes sur la FAQ est supérieur à 850 au bout du 9e mois.

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} 13 = 13$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{100}{9} \times 0,9^n = 0^+$ car ??

$\Big\} \lim\limits_{n \to +\infty} 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n = 13$

À long terme, le nombre de questions présentes sur la FAQ sera de 1300.

N°

Partie B :

1. $v_1 = 9 - 6 \times e^{-0,19(1-1)} = 9 - 6 \times e^0 = 3$

$v_2 = 9 - 6 \times e^{-0,19(2-1)} = 9 - 6 \times e^{-0,19} \simeq 4,04$ 0,5

2. $v_{n+1} - v_n = 9 - 6e^{-0,19(n+1-1)} - (9 - 6e^{-0,19(n-1)})$

$v_{n+1} - v_n = 9 - 6e^{-0,19(n)} - 9 + 6e^{-0,19(n-1)}$

$v_{n+1} - v_n = -6e^{-0,19n} + 6e^{-0,19(n-1)}$

$v_{n+1} - v_n = 6(e^{-0,19(n-1)} - e^{-0,19n})$

$v_{n+1} - v_n = 6(e^{-0,19(n-1)} - e^{-0,19(n-1)} \times e^{-0,19})$

$v_{n+1} - v_n = 6(e^{-0,19(n-1)}(1 - e^{-0,19}))$

$6 > 0$ et $e^{-0,19(n-1)} > 0$ et $1 - e^{-0,19} \simeq 0,17 > 0$

donc $6 \times e^{-0,19(n-1)} \times (1 - e^{-0,19}) > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$

donc la suite v_n est croissante pour tout $n \geq 1$, 0,5 (mais non exigé)

or $v_{14} \simeq 8,49$ et $v_{15} \simeq 8,58$ 0,25

donc la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$ est $n = 15$.

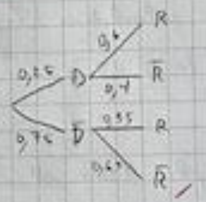
Partie C

1. Avec la modélisation par (u_n) le nombre de questions présentes sur la FAQ est supérieur à 850 au bout de 9 mois (selon l'algorithme fourni) tandis qu'avec la modélisation par (v_n) il faut attendre 15 mois. 0,5

Donc la modélisation par la suite (u_n) conduit à procéder le plus tôt à cette modification.

Exercice 4 :

1. a.



b. $p(\overline{D} \cap R) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \underline{0,2625}$

c. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$p(R) = p(D \cap R) + p(\overline{D} \cap R)$

$p(R) = p(D) \times p_D(R) + 0,2625$

$p(R) = 0,25 \times 0,6 + 0,2625$

$p(R) = 0,4125$

La probabilité que Sandrine réussisse un tir est bien égale à 0,4125.

d. On cherche $p_R(\overline{D})$.

$p_R(\overline{D}) = \dfrac{p(R \cap \overline{D})}{p(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64$

La probabilité que le tir rapporte trois points sachant que Sandrine a réussi un tir est d'environ 0,64.

2. a. C'est un schéma de Bernoulli car on répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès « le tir est réussi » est $p = 0,35$. $X \sim B(10 ; 0,35)$

b. $E(X) = np = 10 \times 0,35 = 3,5$

Pour un grand nombre de lancers, Sandrine réussit en moyenne 3,5 tirs.

c. $p(X \leq 6) \approx 0,97$ (À l'aide de la calculatrice) La probabilité que Sandrine réussisse au plus 6 tirs est d'environ 0,97.

d. $p(X > 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 0,09$

(À l'aide de la calculatrice)

La probabilité que Sandrine rate au plus 4 tirs est d'environ 0,09.

3. Cette série de tirs suit une nouvelle loi binomiale Y.

$Y \sim B(n ; 0,35)$ (On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès « le tir est réussi » est $p = 0,35$)

On cherche $p(Y \geq 1)$ en fonction de n.

$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,35^0 \times (1 - 0,35)^n = 1 - 0,65^n$

On cherche la valeur minimale de n tel que

$p(Y \geq 1) \geq 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - 0,65^n \geq 0,99$

$\Leftrightarrow -0,65^n \geq -0,01$

$\Leftrightarrow 0,65^n \leq 0,01$

$\Leftrightarrow n \geq 11$ car $0,65^{10} \approx 0,013$ et $0,65^{11} \approx 0,009$

La valeur minimale de n pour que la probabilité que Sandrine réussisse au moins un tir parmi les n tirés soit supérieure ou égale à 0,99 est de 11.