Terminale Spé Maths Corrigé DM

Exercice 1

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. On a donc $u_1 = 1000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.
Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne ≈ 1977.

4. **a.** *Initialisation* : on a $u_0 = 1000 \leqslant 2500$: la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2500$.
La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2500$ ou $0,9u_n \leqslant 2250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
$0,9u_n + 250 \leqslant 2250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2500$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.
Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

5. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9u_n + 250 - 2500$, soit
$v_{n+1} = 0,9u_n - 2250 = 0,9(u_n - 2500) = 0,9v_n$.
L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

   b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1500 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 2500 \iff u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0,9^n$.

6. a. $u_{20} = 2500 - 1500 \times 0,9^{20} \simeq 2317$, donc dans 20 ans, soit en 2040, cette influence aura 2317 abonnés à son profil

   b. On peut raisonner par tatônnement à l'aide de la formule de u_n ou utiliser le programme :

```
n = 0
u = 1000
  while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

et on a $u_{15} \simeq 2191$
$u_{16} \simeq 2222$

Le programme s'arrêtera la 16e année, donc le nombre d'abonnés dépassera 2200 en 2036

Exercice A : $f(x) = 4e^{-0,4x}$

1) si $x = 2$, alors $AB = 2$ et $AD = BC = f(2) = 4e^{-0,8}$

ainsi $\mathcal{A}(ABCD) = AB \times AD = 2 \times f(2) = 2 \times 4e^{-0,8} = 8e^{-0,8} \simeq 3,6 \ m^2$

2) si B a pour abscisse x, alors $AB = x$ et $AD = BC = f(x)$

ainsi $\mathcal{A}(ABCD) = AB \times AD = x \times f(x) = x \times 4e^{-0,4x} = 4x e^{-0,4x}$

soit $g(x) = 4x e^{-0,4x}$

alors $g'(x) = 4e^{-0,4x} + 4x \times (-0,4 e^{-0,4x}) = e^{-0,4x}(4 - 1,6x)$

$\left(\begin{array}{c} g = uv \\ \text{donc} \\ g' = u'v + uv' \end{array} \right)$

x	0		$2,5$		10
$e^{-0,4x}$			$+$		
$4 - 1,6x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$10e^{-1}$	$\searrow$	$40e^{-4}$

$a = -1,6 < 0$

$4 - 1,6x = 0$

$\Leftrightarrow 4 = 1,6x$

$\Leftrightarrow \frac{4}{1,6} = x$

$\Leftrightarrow 2.5 = x$

Ainsi l'aire est maximale lorsque $g(x)$ est maximale soit pour $x = 2,5$

Le panneau d'aire maximale a donc pour longueur $AB = 2,5 \, m$

et hauteur $BC = f(2,5) = 4e^{-1} \simeq 1,47 \, m$

Exercice 3 (A) 1) à l'instant initial, la concentration est égale à 2 g/L

2) la concentration est supérieure ou égale à 0,1 g/L sur l'intervalle [0 ; 9,5]

(B) $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$

1) $f'(x) = 1 \times e^{-0,5x} + (x+2)\times(-0,5e^{-0,5x}) = e^{-0,5x}(1 - 0,5x - 1) = -0,5x\, e^{-0,5x}$

x	0		15
$-0,5x$	0	$-$	$a = -0,5 < 0$
$e^{-0,5x}$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	↘	$17e^{-7,5}$

$-0,5x = 0 \iff x = 0$

2) on peut calculer $f''(x)$ à partir de $f'(x)$ ou utiliser les résultats fournis par le logiciel car la ligne 2 donne le résultat du calcul de la dérivée de la dérivée de f, c'est-à-dire f'' et la ligne 3 donne la forme factorisée de f'', à savoir $f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$

on a alors

x	0		2		15
$0,25x - 0,5$		$-$	0	$+$	$a = 0,25 > 0$
$e^{-0,5x}$			$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$0,25x - 0,5 = 0$

$\iff 0,25x = 0,5$

$\iff x = \frac{0,5}{0,25}$

$\iff x = 2$

ainsi $f''(x) \leq 0$ sur $[0;2]$ donc f est concave sur $[0;2]$

$f''(x) \geq 0$ sur $[2;15]$ donc f est convexe sur $[2;15]$

de plus, f'' s'annule en changeant de signe pour $x=2$ donc C_f admet un point d'inflexion d'abscisse $x = 2$

(C) 1) D'après (A) 2), le médicament reste actif pendant 9,5 h environ

2) D'après (B) 2), la baisse de concentration ralentit au point d'inflexion c'est-à-dire au bout de 2 h