Vous traiterez par groupe l'exercice 1 obligatoirement (à rendre à la fin de la séance)

et au choix l'un des exercices A ou B en devoir Maison Individuel facultatif

Exercice 1

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
  u = 1 000
  for i in range(n) :
    u = 0,9*u + 250
  return u
```

4. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

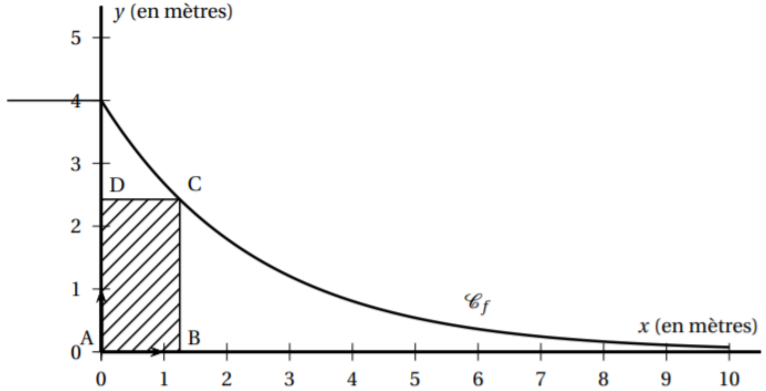
6. a. Calculer u_{20} et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
b. Déterminer, par la méthode de votre choix, en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Exercice A : Approfondissement

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est 3,6 m^2.

2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible?
On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

Exercice B : Remédiation DS1

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,15]$.

4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x+2)*\exp(-0.5*x))$
	$\exp(-0.5x)-0.5*\exp(-0.5x)*(x+2)$
2	deriver $(\exp(-0.5*x)-0.5*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2)$
3	factoriser $(-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\exp(-0.5*x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?