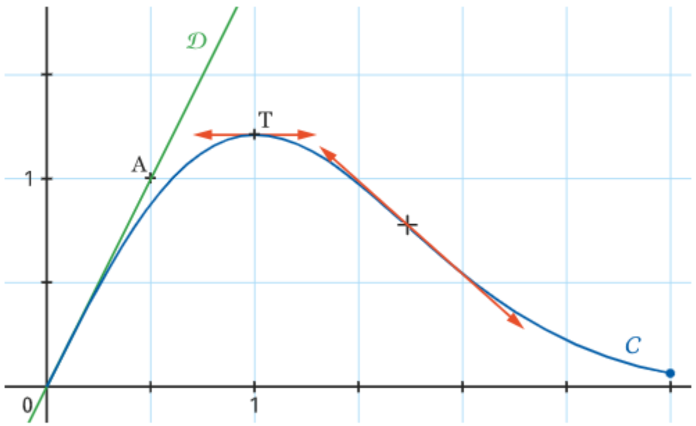
Terminales Spécialité Maths	**D N S n° 1** (facultatif) A rendre le mardi 5/11/2024

Exercice 1 :
On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[\,0\,;3\,]$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Elle passe par la point A de coordonnées (0,5 ; 1) et par l'origine du repère.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues par lecture graphique.



1. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$
2. Donner la valeur de $f'(1)$. Justifier.

Partie B

La fonction f est définie sur $[\,0;3]$ par $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $[\,0;3]]$

1. Montrer que, pour tout $x \in [\,0;3]$:

$$f'(x) = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$$

2. Etudier les variations de la fonction f sur $[\,0;3]$ et dresser son tableau de variations.

3. En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
   Pour tout x appartenant à $[\,0\,;3\,]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
   Un journaliste affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.
   Que dire de cette affirmation ?

Exercice 2 :
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80° dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.
Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minutes. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité:

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M) \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

On choisit M=10 et $k = -0,2$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$

2) a/ Démontrer par récurrence que la suite (T_n) est minorée par 10.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b/ En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   Ce résultat était-il prévisible ?

3) On pose, pour tout entier naturel n: $u_n = T_n - 10$.
   a/ Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b/ En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$
   c/ Déterminer la température du café au bout de 15 minutes (arrondir au dixième).
   d/ Combien de temps doit-on attendre afin que la température du café soit inférieure à 40°C ?