Terminales Spécialité Maths **D N S n° 1** correction

Exercice 1 :

1. La droite $\mathcal{D}$ passe par la point A de coordonnées (0,5 ; 1) et par l'origine du repère, elle a donc pour coefficient directeur $m = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1}{0,5} = 2$
   d'où une équation de $\mathcal{D}$ est $y = 2x$

2. La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul, ainsi $f'(1) = 0$

Partie B $\boldsymbol{f(x) = 2xe^{-0,5x^2}}$

1. $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-0,5x^2}$
   $u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = -0,5 \times 2x\, e^{-0,5x^2} = -xe^{-0,5x^2}$

   Or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où $f'(x) = 2e^{-0,5x^2} + 2x \times (-xe^{-0,5x^2})$
   $= 2e^{-0,5x^2} - 2x^2e^{-0,5x^2}$
   $= (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$

2.

x	0		1		3
$e^{-0,5x^2}$			+		
$2 - 2x^2$		+	0	$-$	
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-0,5}$	$\searrow$	$6e^{-4,5}$

$2 - 2x^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 2$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

Ainsi, f est strictement croissante sur [0 ; 1] et f est strictement décroissante sur [1 ; 3]

3. Le maximum de f est $f(1) = 2e^{-0,5} \approx 1,21$, soit 1,21 millions de lits occupés.
   Donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million. L'affirmation est exacte.

Exercice 2 :

1) Avec M=10 et $k = -0,2$

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$
$$\Leftrightarrow T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$$
$$\Leftrightarrow T_{n+1} - T_n = -0,2T_n + 2$$
$$\Leftrightarrow T_{n+1} = T_n - 0,2T_n + 2$$
$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,8T_n + 2$$

2) a/ Il faut montrer que pour tout entier n, $T_n \geq 10$

Initialisation : On a $T_0 = 80$ donc $T_0 \geq 10$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $T_k \geq 10$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $T_{k+1} \geq 10$

or $T_k \geq 10$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}8T_k \geq 8$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}8T_k + 2 \geq 10$

$\Leftrightarrow \quad T_{k+1} \geq 10$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire
donc pour tout entier n on a $T_n \geq 10$

Cela signifie que la température du café ne sera jamais inférieure à 10 °C

b/ $T_{n+1} - T_n = 0{,}8T_n + 2 - T_n = -0{,}2T_n + 2$

Or $T_n \geq 10 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}2T_n \leq -0{,}2 \times 10$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}2T_n + 2 \leq -0{,}2 \times 10 + 2$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}2T_n + 2 \leq 0$

ainsi $T_{n+1} - T_n \leq 0$ ce qui prouve que la suite (T_n) est décroissante

Ce résultat était prévisible car il signifie que la température du café va diminuer au cours du temps.

3) a/ $u_n = T_n - 10$ donc $T_n = u_n + 10$

Si $u_n = T_n - 10$ *alors*

$u_{n+1} = T_{n+1} - 10$

$= 0{,}8T_n + 2 - 10$

$= 0{,}8T_n - 8$

$= 0{,}8(u_n + 10) - 8$ car $T_n = u_n + 10$

$= 0{,}8u_n + 8 - 8$

$= 0{,}8u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison q = 0,8 et de 1er terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$

b/ alors $u_n = u_0 \times q^n = 70 \times 0{,}8^n$

or $T_n = u_n + 10$

donc $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$

c/ $T_{15} = 70 \times 0{,}8^{15} + 10 \approx 12{,}5$
donc la température du café au bout de 15 minutes est d'environ 12,5 °C

d/ $T_3 = 70 \times 0{,}8^3 + 10 \approx 45{,}8$ et $T_4 = 70 \times 0{,}8^4 + 10 \approx 38{,}7$

donc il faut attendre 4 minutes afin que la température du café soit inférieure à 40°C