Exercice 1 /3

$f(x) = x^2 - 7x + 10 \qquad g(x) = \sqrt{x}$

1) $u = g \circ f$ donc $u(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 7x + 10) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

0,5

2) a) $f(x) \geq 0 \iff x^2 - 7x + 10 \geq 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 > 0$ il y a 2 racines

$x_1 = \dfrac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{7-3}{2} = 2 \qquad x_2 = \dfrac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{7+3}{2} = 5$

0,75

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		+	0	−	0	+	

$a = 1 > 0$

d'où $S =]-\infty ; 2] \cup [5 ; +\infty[$

0,25

b) u est définie pour tout x tel que $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ donc $D_u =]-\infty ; 2] \cup [5 ; +\infty[$

3) $u = \sqrt{f}$ donc $u' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ avec $f(x) = x^2 - 7x + 10$ et $f'(x) = 2x - 7$

ainsi $u'(x) = \dfrac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$ 0,5

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{2}$		5		$+\infty$
$2x - 7$			−		0		+		
$2\sqrt{x^2-7x-10}$		+	0				0	+	
$u'(x)$		−	‖				‖	+	

$a = 2 > 0$

$2x - 7 = 0 \iff x = \dfrac{7}{2}$

1

u est donc décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[5 ; +\infty[$

Exercice 2 /7

A
1) $f(-1) = 1$ car C_f passe par le point de coordonnées $(-1;1)$ 0,25

2) $f'(0,5) = 0$ car la tangente au point B d'abscisse 0,5 est horizontale 0,5

3) $f'(2) = -3$ car la tangente au point A d'abscisse 2 a pour coefficient directeur -3 0,5

/3

4) T a pour coefficient directeur -3 et pour ordonnée à l'origine 7 donc son équation réduite est $y = -3x + 7$ 0,5

5) $f'(x) > 0$ a pour solution $S =]-\infty ; 0,5[$ car f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0,5[$ 0,5

6) f est concave sur $[0,5 ; 2]$ car C_f est située en dessous de ses tangentes sur $[0,5 ; 2]$ 0,75

B
$f(x) = -x^2 + x + 3$

/2

1) $f'(x) = -2x + 1$ 0,25 et $f''(x) = -2$ 0,25 donc $f''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ 0,25

donc f est concave sur $\mathbb{R}$ 0,25

1

2) f est concave sur $\mathbb{R}$ donc C_f est située en dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}$

donc en particulier, C_f est située en dessous de sa tangente T au point A

1

et puisque T a pour équation $y = -3x + 7$, on en déduit que,

pour tout réel x, $f(x) \leq -3x + 7$ c'est-à-dire $-x^2 + x + 3 \leq -3x + 7$

C
$g(x) = f(x) - (-3x + 7) = -x^2 + x + 3 + 3x - 7 = -x^2 + 4x - 4$

1) on peut étudier le signe du trinôme ou remarquer que

/2

$g(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$

1,5

or $(x-2)^2 \geq 0$ donc $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$

2) Pour tout réel x, $g(x) \leq 0 \iff f(x) - (-3x + 7) \leq 0$

$\iff f(x) \leq -3x + 7$

0,5

$\iff -x^2 + x + 3 \leq -3x + 7$

Exercice 3 $\frac{}{3}$ $f(x) = (x^2+2x-3)^3$

C_f admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses si $f'(x) = 0$ (0,5)

or $f = u^n$ avec $u(x) = x^2+2x-3$ d'où $u'(x) = 2x+2$

et puisque $(u^n)' = n u' u^{n-1}$, on a $f'(x) = 3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$ (1)

Ainsi $f'(x) = 0 \iff 3(2x+2)(x^2+2x-3)^2 = 0$

$\iff 2x+2 = 0$ ou $(x^2+2x-3)^2 = 0$

$\iff x = -1$ ou $x^2+2x-3 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4\times1\times(-3) = 16 > 0$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{-2-4}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{-2+4}{2} = 1$

L'équation $f'(x) = 0$ admet 3 solutions distinctes donc C_f admet 3 tangentes parallèles à l'axe des abscisses (1,5)

remarque : pour l'équation $x^2+2x-3 = 0$,

on constate que 1 est racine évidente (car $1^2+2\times1-3 = 0$)

or on sait que les produits des racines est $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

on a donc $x_1 = 1$ et $1\times x_2 = \frac{-3}{1}$ donc $x_2 = -3$

on retrouve ainsi les 2 racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$

Exercice 4 /7

A) 1) (a) 0,5 2) (d) 0,5 /1

B) $f(x) = (x-5)e^{0,2x} + 5$ sur $[-10;5]$

1) a) $f = uv + 5$ avec $u(x) = x - 5$ $v(x) = e^{0,2x}$
$u'(x) = 1$ $v'(x) = 0,2e^{0,2x}$

/6 (1)

or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(x) = 1 \times e^{0,2x} + (x-5) \times 0,2e^{0,2x} = e^{0,2x} + 0,2x e^{0,2x} - e^{0,2x}$

donc $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$

b)

x	-10		0		5
$0,2x$		$-$	0	$+$	
$e^{0,2x}$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-15e^{-2}+5$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

$a = 0,2 > 0$ 0,5
0,25
0,25
0,5
(1,5)

c) au point d'abscisse -5, la tangente T a pour coefficient directeur $f'(-5) = 0,2 \times (-5) e^{0,2 \times (-5)} = -e^{-1}$

(0,5)

soit $f'(-5) = -\frac{1}{e}$

2) a) le logiciel donne la dérivée de g, c'est-à-dire $g'(x) = \frac{1}{25} x e^{\frac{1}{5}x} + \frac{1}{5} e^{\frac{1}{5}x}$

donc $g'(x) = 0,04x e^{0,2x} + 0,2 e^{0,2x}$

(0,5)

or $g(x) = f'(x)$ donc $g'(x) = f''(x) = 0,04x e^{0,2x} + 0,2e^{0,2x} = (0,2 + 0,04x)e^{0,2x}$

b)

x	-10		-5		5
$0,2+0,04x$		$-$	0	$+$	
$e^{0,2x}$			$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$a = 0,04 > 0$ 0,5
0,25
0,25
(1,5)

$0,2 + 0,04x = 0$
$\Leftrightarrow 0,04x = -0,2$
$\Leftrightarrow x = \frac{-0,2}{0,04}$
$\Leftrightarrow x = -5$

0,5

ainsi f est concave sur $[-10;-5]$ (car $f'' < 0$) et f est convexe sur $[-5;5]$ (car $f'' > 0$)

c) f'' s'annule en changeant de signe pour $x = -5$ donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion
(1) d'abscisse $x = -5$ et d'ordonnée $y = f(-5) = -10e^{-1} + 5$