DS 1 : correction

Exercice 1 (5 points)

1. b
2. c
3. a
4. b
5. c

Exercice 2 /7 points

Partie A :

1) $\mathcal{D} : y = 2x$ (0,5)

2) $f'(1) = 0$ car la droite T est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur vaut 0. (0,5) (1,5)

3) f semble concave sur $[0 ; 1,75]$. (0,5)

Partie B :

1) f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-0,5x^2}$

$u'(x) = 2$ et $v'(x) = -0,5 \times 2x e^{-0,5x^2}$ 0,25 0,5

$v'(x) = -xe^{-0,5x^2}$ (1)

$(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 2 \times e^{-0,5x^2} + (2x) \times (-xe^{-0,5x^2}) = (2 - 2x^2) e^{-0,5x^2}$ (1)

2) $2 - 2x^2 = 0$

$2 = 2x^2$

$1 = x^2$

$x = 1$ ou $x = -1$

0,5

x	0		1		3	
$2-2x^2$		+	0	−		0,5
$e^{-0,5x^2}$		+		+		0,25
$f'(x)$		+	0	−		0,25
$f(x)$	0	↗	$2e^{-0,5}$	↘	$6e^{-4,5}$	0,25 + 0,5

(2,25) (2,25)

3) a) $f''(x) = x(2x^2 - 6)e^{-0,5x^2}$ (0,25) (0,25)

b) $f''(x) = 0 \iff x(2x^2-6)e^{-0,5x^2} = 0$

$\iff x = 0$ ou $2x^2 - 6 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 = 3$

(0,5) $\iff x = 0$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ (0,5)

x	0		$\sqrt{3}$		3
x	0	+		+	
$2x^2-6$		−	0	+	
$e^{-0,5x^2}$		+		+	
$f''(x)$	0	−	0	+	

(0,5) (1,5)

f est concave sur $[0 ; \sqrt{3}]$ et est convexe sur $[\sqrt{3} ; 3]$. (0,5)

Partie C :

Le max de f est $2e^{-0,5}$ atteint en $x = 1$.

$2e^{-0,5} \approx 1,21$ soit 1,21 million de lits occupés } Affirmation exacte. (0,5) (0,5)

Exercice 3 /4 points

1) $f(0) = \frac{1}{4}$. 25% des jeunes connaissent cette boisson au début de la campagne. (0,5)

(1)

$f(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 50% des jeunes connaissent cette boisson au bout d'un mois. (0,5)

2) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(t) = 2t+1$ et $v(t) = 2t+4$

$u'(t) = 2$ $v'(t) = 2$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $f'(t) = \frac{2(2t+4)-(2t+1)\times 2}{(2t+4)^2} = \frac{4t+8-4t-2}{(2t+4)^2} = \frac{6}{(2t+4)^2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} 6>0 \\ (2t+4)^2>0 \end{array}\right\}$ $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$. (0,75)

(1,75)

3) $f(t) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{2t+1}{2t+4} = 0,75 \Leftrightarrow 2t+1 = 0,75(2t+4) \Leftrightarrow 2t+1 = 1,5t+3$

$\Leftrightarrow 0,5t = 2 \Leftrightarrow t = 4$. (1)

Au bout de 4 mois, 75% des jeunes connaissent cette boisson. (0,25)

(1,25)

Exercice 4 /4 points

1) $g'(x) = 4\times 3\times 1\times(x-2)^2 = 12(x-2)^2$ (1)

g est de la forme u^n avec $u(x) = x-2$ et $n=3$

$u'(x) = 1$

(1,5)

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$g''(x) = 12\times 2\times 1\times(x-2) = 24(x-2)$. (0,5)

2) $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$g(1) = 4(1-2)^3 = -4$

$g'(1) = 12(1-2)^2 = 12$

$y = 12(x-1) - 4$

$y = 12x - 12 - 4$

$y = 12x - 16$. (1)

(1)

3) → Convexité de g

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 24(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ 0,25

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

g est concave sur $]-\infty;2]$ et est convexe sur $[2;+\infty[$. 0,5

Sur $]-\infty;2]$, $\mathcal{C}_g$ est en dessous de ses tangentes. 0,25

(1,5)

Donc pour tout réel $x \leq 2$, $g(x) \leq 12x-16$

$4(x-2)^3 \leq 12x-16$. 0,5

(1,5)