$f(t) = t^2 e^{-0,1t}$ sur $[0;60]$

1) $f = uv$ avec $u(t) = t^2$ $\quad v(t) = e^{-0,1t}$

$u'(t) = 2t$ $\quad v'(t) = -0,1 e^{-0,1t}$

2,5 or $(uv)' = u'v + uv'$ donc

$f'(t) = 2t e^{-0,1t} + t^2 \times (-0,1 e^{-0,1t}) = e^{-0,1t}(2t - 0,1t^2)$

2) a) $e^{-0,1t} > 0$ et $2t - 0,1t^2 = 0$

$\iff t(2 - 0,1t) = 0$

$\iff t = 0$ ou $2 - 0,1t = 0 \iff 0,1t = 2 \iff t = \frac{2}{0,1} = 20$

t	0		20		60
$e^{-0,1t}$			+		
$2t-0,1t^2$	0	+	0	−	
$f'(t)$	0	+	0	−	

2 $a = -0,1 < 0$

(sur $]-\infty;+\infty[$, on a

t	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$2t-0,1t^2$		−	0	+	0	−	

$a = -0,1 < 0$)

b) f est croissante sur $[0;20]$ et f est décroissante sur $[20;60]$

1,5 c) le nombre de malades est donc maximal le 20^{e} jour et ce nombre est d'environ 54 milliers (car $f(20) = 20^2 \times e^{-0,1\times 20} = 400 e^{-2} \simeq 54$)

3) $f'(t) = e^{-0,1t}(2t - 0,1t^2)$

$f' = uv$ avec $u(t) = e^{-0,1t}$ $\quad v(t) = 2t - 0,1t^2$

$u'(t) = -0,1 e^{-0,1t}$ $\quad v'(t) = 2 - 0,2t$

1,5 $f''(t) = -0,1 e^{-0,1t}(2t - 0,1t^2) + e^{-0,1t}(2 - 0,2t)$

$= e^{-0,1t}(-0,2t + 0,01t^2 + 2 - 0,2t)$

$= e^{-0,1t}(0,01t^2 - 0,4t + 2)$

4) a) $e^{-0,1t} > 0$ et pour $0,01t^2 - 0,4t + 2$, on a $\Delta = (-0,4)^2 - 4 \times 0,01 \times 2 = 0,08$

$\Delta > 0$, les 2 racines sont $t_1 = \frac{-(-0,4) - \sqrt{0,08}}{2 \times 0,01} \simeq 5,86$

$t_2 = \frac{-(-0,4) + \sqrt{0,08}}{2 \times 0,01} \simeq 34,14$

on a alors pour $[0;60]$

t	0		$t_1 \simeq 5,86$		$t_2 \simeq 34,14$		60
$e^{-0,1t}$				$+$			
$0,01t^2-0,4t+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a=0,01>0$

2,75

f est donc convexe sur $[0;t_1]$ et sur $[t_2;60]$ car f'' est positive sur ces 2 intervalles
f est concave sur $[t_1;30]$ car f'' est négative sur $[t_1;30]$

b) sur $[0;15]$, f'' s'annule en changeant de signe pour $t_1 \simeq 5,86$ donc C_f admet un point d'inflexion d'abscisse $t_1 \simeq 5,86$

0,75 Puisque f est croissante sur $[0;20]$, alors l'abscisse de ce point d'inflexion correspond au jour où l'augmentation du nombre de malades a été la plus forte.

On peut aussi considérer qu'en ce point, il y a un ralentissement de la vitesse de propagation de cette maladie.