exercice : fiche

1) $f(x) = \dfrac{3}{e^x + 2}$ sur $\mathbb{R}$

a)
en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3 \\[2ex] \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 2 = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{e^x+2} = \frac{3}{2}$$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ donc la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 2 = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x+2} = 0$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

b) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3$ $\quad v(x) = e^x + 2$
$u'(x) = 0$ $\quad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{0 \times (e^x + 2) - 3e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x+2)^2}$$

or $e^x > 0$ et $(e^x + 2)^2 > 0$

donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$		0

2) $f(x) = \dfrac{2\ln x + 2x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

a) en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$
$\Bigg\}$ $\lim\limits_{x \to 0} 2\ln x + 2x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $x > 0$

$\Bigg\}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{2\ln x + 2x}{x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{2\ln x + 2x}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{2x}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x} + 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$
$\Bigg\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\ln x}{x} + 2 = 2$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

b) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2\ln x + 2x$ et $v(x) = x$
$u'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 2$ $v'(x) = 1$

d'où $f'(x) = \dfrac{\left(2 \times \frac{1}{x} + 2\right) \times x - (2\ln x + 2x)}{x^2} = \dfrac{2 + 2x - 2\ln x - 2x}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$

or $2 - 2\ln x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 2 \geqslant 2\ln x$
$\Leftrightarrow 1 \geqslant \ln x$
$\Leftrightarrow e^1 \geqslant x$
$(\Leftrightarrow x \leqslant e)$

x	0		e		$+\infty$
$2-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2			$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2+2e}{e}$	$\searrow$	2

37) $f(x) = 0,5(6 - e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$

a) en $-\infty$ $\quad f(x) = 0,5\left(6 - \frac{1}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{e^x} = -\infty$

ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} 6 - \frac{1}{e^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 0,5\left(6 - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas d'asymptote)

en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 6 - \frac{1}{e^x} = 6$

ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,5\left(6 - \frac{1}{e^x}\right) = 0,5 \times 6 = 3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

et la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

b) $f(x) = 0,5(6 - e^{-x}) = 3 - 0,5e^{-x}$

donc $f'(x) = 0 - 0,5 \times (-e^{-x}) = 0,5e^{-x}$ or $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

ainsi

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3