4) $f(x) = 2\ln x - x^2 + x$ sur $]0;+\infty[$

a) en 0 :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 2\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

en $+\infty$: $f(x) = 2\ln x - x^2 + x = x^2\left(\dfrac{2\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x} = -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{2\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(x) = 2\times\dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{2}{x} - 2x + 1 = \dfrac{2 - 2x^2 + x}{x} = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x}$

pour $-2x^2+x+2$, $\Delta = 1^2 - 4\times(-2)\times 2 = 17 > 0$, $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2\times(-2)} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2\times(-2)} = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} < 0$

donc $x_2 \notin I$

x	0		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$-2x^2+x+2$		$+$	0	$-$	
x	0		$+$		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \simeq 0{,}135$	↘	$-\infty$

(sur $\mathbb{R}$, on a

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-2x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a = -2 < 0$)

5) $f(x) = 2 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$

a) en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^x = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - xe^x = -\infty$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \text{ (croissance comparée)} \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 - xe^x = 2$$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$

b) xe^x est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = e^x$

ainsi $f'(x) = 0 - (1 \times e^x + xe^x) = -e^x - xe^x = e^x(-1-x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
e^x			$+$		
$-1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2 + \frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

$a = -1 < 0$

$-1 - x = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = 2 - (-1 \times e^{-1}) = 2 + e^{-1} = 2 + \frac{1}{e}$

6) $f(x) = x^3 - 3\ln x$ sur $]0;+\infty[$

a) en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} -3\ln x = +\infty$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to 0} x^3 - 3\ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C_f

en $+\infty$: $f(x) = x^3 - 3\ln x = x^3\left(1 - 3\dfrac{\ln x}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ (croissance comparée)

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - 3\dfrac{\ln x}{x^3} = 1$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\left(1 - 3\dfrac{\ln x}{x^3}\right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3\times\dfrac{1}{x} = 3x^2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x^3}{x} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x^3 - 3}{x} = \dfrac{3(x^3 - 1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$3(x^3-1)$		$-$	0	$+$	
x	0		$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = 1^3 - 3\ln 1 = 1$