Exercice 1

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x+3} + x + 3$$

$f'(x) = \frac{1}{4} \times 2e^{2x+3} + 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}\, e^{2x+3} + 1$

$$g(x) = \frac{5}{e^x + 2}$$

$g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5$ et $v(x) = e^x + 2$

$u'(x) = 0$ $v'(x) = e^x$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $g'(x) = \frac{0\times(e^x+2)\ -\ 5e^x}{(e^x+2)^2}$

$$g'(x) = \frac{-5e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$h(x) = \frac{e^x}{x + 1}$$

. $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x + 1$

$u'(x) = e^x$ $v'(x) = 1$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $g'(x) = \frac{e^x\times(x+1)\ -\ 1\times e^x}{(x+1)^2}$

$$g'(x) = \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{xe^x}{(x + 1)^2}$$

Exercice 2

f est la fonction définie sur [0 ; 4] par $f(x) = (2x - 6)e^{2,5x}$.
a/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (5x - 13)e^{2,5x}$

$f = u \times v$ avec $u(x) = 2x - 6$ et $v(x) = e^{2,5x}$

$u'(x) = 2$ $v'(x) = 2{,}5e^{2,5x}$

Or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où $f'(x) = 2 \times e^{2,5x} + (2x - 6) \times 2{,}5e^{2,5x}$

$$= 2e^{2,5x} + 5xe^{2,5x} - 15e^{2,5x}$$

$$= e^{2,5x}(2 + 5x - 15)$$

$$= e^{2,5x}(5x - 13)$$

b/ Etablir le tableau de variation de f sur [0 ; 4]

x	0		$2,6$		4
$e^{2,5x}$			$+$		
$5x - 13$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	$-0,8e^{6,5} \approx -532,1$	↗	$2e^{10} \approx 44052,9$

$a = 5 > 0$ et

$5x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5} = 2,6$

Exercice 3

Etudier, sur l'ensemble proposé, **les variations** de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$a)\ f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

Fiche AP Maths (1)

Ex2 a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ $\quad v(x) = x^2+1$

$u'(x) = e^x$ $\quad v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{e^x \times (x^2+1) - 2x \times e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$	0	$+$	
e^x			$+$		
$(x^2+1)^2$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			↗		

$a = 1 > 0$

pour $x^2 - 2x + 1$; $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$

(remarque : $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$)

f est croissante sur $\mathbb{R}$

$b)\ f(x) = 5e^{2x+3} - 10x$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = 5e^{2x+3} - 10x$

• $f'(x) = 5 \times 2e^{2x+3} - 10 = 10e^{2x+3} - 10$

• $f'(x) \geqslant 0$

$\iff 10e^{2x+3} - 10 \geqslant 0$

$\iff 10e^{2x+3} \geqslant 10$

$\iff e^{2x+3} \geqslant 1 \quad (e^0 = 1)$

$\iff e^{2x+3} \geqslant e^0$

$\iff 2x+3 \geqslant 0$

$\iff x \geqslant -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-10	$\nearrow$	

$c)\ f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ sur $[\,0\,;6\,]$

c) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ sur $[0;6]$

$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 6x - x^2$

$u'(x) = 6 - 2x$

• $f'(x) = \dfrac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \dfrac{2(3-x)}{2\sqrt{6x-x^2}} = \dfrac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}$

x	0		3		6
$3-x$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{6x-x^2}$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$a = -1 < 0$